

XX Escola de Verão em Matemática

Introdução à Dualidade AdS/CFT

Ulysses Camara da Silva

UFES

Aula 1: Teorias Conformes - CFT

- **Contexto:** dualidade e a ideia holográfica ($\text{bulk} \leftrightarrow \text{borda}$)
- **Motivação:** criticalidade e perda de escala ($\xi \rightarrow \infty$)
- **CFT:** definição por simetrias, peso conforme, grupo $SO(d, 2)$
- **Funções de Correlação:** formas universais das funções de 2 (e 3 pontos)

Mensagem-chave

Duas teorias físicas distintas, definidas em dimensões diferentes, podem ser mapeadas uma na outra.

- Teoria “na borda” (sem gravitação e quântica) em d dimensões
- Teoria “no volume” (gravitacional e clássica) em $d+1$ dimensões

Dualidade: leituras complementares

- Sistemas *fisicamente equivalentes* (mesma “informação”);
- Graus de liberdade reorganizados;
- Muitas vezes: acoplamento “fraco $\leftrightarrow$ forte”

Analogia

- espaço real $\leftrightarrow$ espaço de Fourier

Exemplo de dualidade: sine-Gordon $\leftrightarrow$ Thirring

Modelo de sine-Gordon

$$\mathcal{L}_{\text{SG}} = -\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{m_{\text{SG}}^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta\phi)) ,$$

Modelo de Thirring

$$\mathcal{L}_{\text{Th}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_{\text{Th}}) \psi - \frac{g}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) .$$

Relação entre os acoplamentos

$$\frac{g}{\pi} = \frac{4\pi}{\beta^2} - 1 .$$

Duas descrições com graus de liberdade distintos (bosônicos vs. fermiônicos), mas são mapeados um no outro (são fisicamente equivalentes).

Regime perturbativo de sine-Gordon

Para o acoplamento pequeno, $\beta \ll 1$, o potencial de SG fica:

$$\frac{m_{\text{SG}}^2}{\beta^2} \left(1 - \cos(\beta\phi) \right) = m_{\text{SG}}^2 \left(\frac{\phi^2}{2} - \frac{\beta^2 \phi^4}{4!} + \frac{\beta^4 \phi^6}{6!} + \mathcal{O}(\beta^6) \right).$$

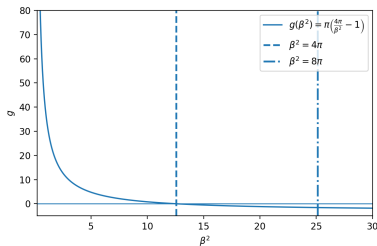
Interpretação: para $\beta^2 \ll 1$, o SG é aproximadamente um escalar massivo com interações fracas (correções em potências de β^2).

Acoplamentos: β^2 pequeno $\Rightarrow$ Thirring forte

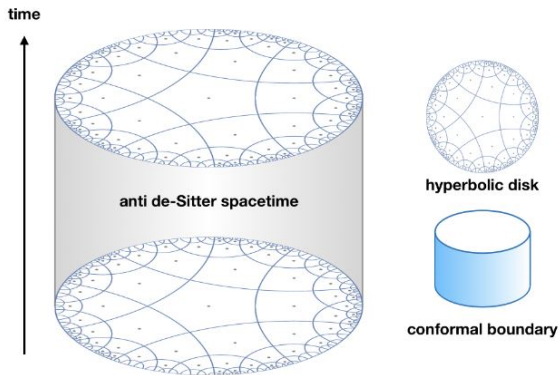
Pela dualidade

$$g(\beta^2) = \pi \left(\frac{4\pi}{\beta^2} - 1 \right),$$

- Se $\beta^2 \ll 1$ (regime perturbativo do sine-Gordon), então $g \approx \frac{4\pi^2}{\beta^2} \Rightarrow$ Thirring em **acoplamento forte**.
- O ponto $g = 0$ (férmion livre) ocorre em $\beta^2 = 4\pi$.



Nossa dualidade de interesse - AdS/CFT

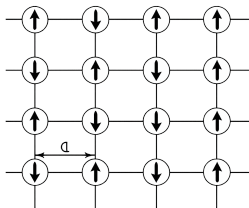


Esquema: uma teoria no *bulk* (interior) - AdS. Outra definida na *borda* - CFT.

- 1 **CFT:** sistemas sem escala (hoje)
- 2 **AdS:** geometria, isometrias e borda conforme
- 3 **Holografia:** dicionário bulk–borda e a correspondência AdS/CFT

Motivação para o estudo de uma Teoria de Campo Conforme

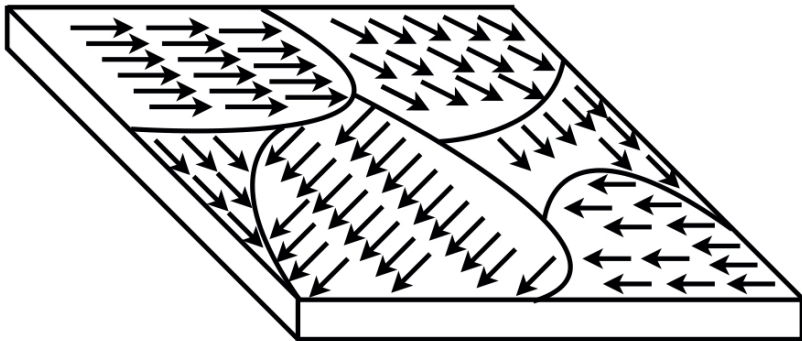
Alguns sistemas físicos exibem transições de fase sem calor latente (de primeira ordem) - diferente, e.g., da transição gelo-água. O exemplo típico é um sistema ferromagnético (modelo de Ising). Cada “spin” interage com os primeiros vizinhos. A energia é menor quando os vizinhos estão alinhados (em paralelo) e maior quando estão opostos.



- No limite de temperatura nula, a energia do sistema deve ter o seu menor valor (“vácuo”) - todos os “spins” apontando na mesma direção, $\langle \vec{s} \rangle = \vec{s}_{max}$.
- Para uma temperatura suficientemente grande, as flutuações térmicas devem suprimir a interação, $\langle \vec{s} \rangle = 0$ (fase paramagnética),
- Como consequência, para alguma temperatura (crítica) T_c , temos a transição da fase paramagnética ($\langle \vec{s} \rangle = 0$) para a ferromagnética ($\langle \vec{s} \rangle \neq 0$) - uma quebra espontânea de simetria.

Qual a configuração típica do sistema a temperatura fixa?

Domínios de spins e ξ



Comprimento de correlação ξ fornece a escala das ilhas magnéticas.

Aproximando do ponto crítico

$$\xi \longrightarrow |T - T_c|^{-\nu} \rightarrow \infty, \nu > 0.$$

ν é um *expoente crítico*. Outras variáveis termodinâmicas também divergem obedecendo Leis de Potência.

O que significa a divergência de ξ ?

R: Ausência de escala

Rede no ponto crítico



Ising 2D no ponto crítico em duas escalas distintas. Fonte: J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*

Clique aqui para abrir o vídeo
youtube.com/watch?v=fi-g2ET97W8

Consequência fundamental: ausência de escala

Ausência de escala

No ponto crítico: $\xi \rightarrow \infty$ - não existe escala característica.

- Surge uma simetria de reescalamiento (dilatações)
- Se nossas escalas de interesse são muito maiores que o espaçamento a da rede. O sistema pode ser tratado no limite contínuo

- No limite contínuo, um sistema na rede é descrito por uma teoria de campo
- Em geral, a teoria possui simetria de translações e rotações (Lorentz)
- No ponto crítico, temos algo extra, a invariância de escala - a simetria do modelo é ampliada
- Objeto que possui todas essas simetrias: **Teorias Conformes (CFTs)**

Transformações conformes: definição geométrica

Uma transformação conforme é definida como

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu(x)$$

tal que o elemento de linha escrito nas coordenadas antigas seja dado por

$$g'_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu = g'_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu,$$

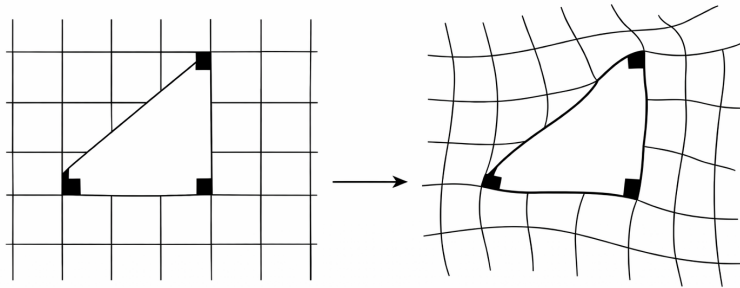
onde $\Omega(x)$ é uma função escalar (sua forma geral será determinada), positiva. ou seja

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x),$$

Interpretação

- Ângulos são preservados
- Distâncias podem ser reescaladas localmente
- Generaliza o conceito de isometria ($\Omega = 1$)

Típica transformação conforme



Conformal transformation

Isometrias versus simetrias conformes

Para uma transformação arbitrária de coordenadas, a métrica muda como:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x).$$

$$\delta g_{\mu\nu}(x) \equiv g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x),$$

para uma transformação infinitesimal, $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$, então

$$\delta g_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu,$$

- **Isometria - equação de Killing**

$$\delta g_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$$

- **Simetria conforme - equação de Killing “generalizada” (conforme)**

$$\delta g_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu = (\Omega(x) - 1) g_{\mu\nu}$$

Equação de Killing conforme

Papel da Simetria Conforme

A simetria conforme permite um *reescala local* da métrica, apenas transformações rígidas.

Para o caso de um espaço plano, $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ ou $\delta_{\mu\nu}$, temos

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{d} (\partial \cdot \xi) \eta_{\mu\nu}, \quad \partial \cdot \xi \equiv \partial_\rho \xi^\rho.$$

Equação de Killing conforme

Solução geral - $(d+1)(d+2)/2$ parâmetros independentes:

$$\xi^\mu(x) = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \lambda x^\mu + b^\mu x^2 - 2(b \cdot x) x^\mu$$

Interpretação física do resultado

Cada termo independente da solução corresponde a uma simetria distinta:

- **Translações - “não há ponto privilegiado” (espaço homogêneo):**

$$\xi^\mu = a^\mu$$

- **Rotações / Lorentz - “não há direção privilegiada” (espaço isotrópico):**

$$\xi^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

- **Dilatações - “não há régua privilegiada” (falta de escalas)**

$$\xi^\mu = \lambda x^\mu$$

- **Transformações conformes especiais - “inversão $x \rightarrow 1/x$ ”:**

$$\xi^\mu = b^\mu x^2 - 2(b \cdot x) x^\mu$$

Observação

Os operadores $\delta_a \hat{\mathcal{O}}$, onde $\delta_a x^\mu = \delta_a \hat{\mathcal{O}} x^\mu$, $a = 1, 2, \dots, (d+1)(d+2)/2$ fecham a álgebra do grupo conforme $SO(d+1, 1)$ ou $SO(d, 2)$.

- **Translações:**

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$$

- **Rotações / Lorentz:**

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \quad \Lambda \in SO(d) \text{ ou } SO(d-1, 1),$$

- **Dilatações**

$$x'^{\mu} = \rho x^{\mu}, \quad \rho > 0,$$

- **Transformações conformes especiais:**

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} + b^{\mu} x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2},$$

Campo em uma Teoria Conforme

Uma CFT é formada por um conjunto de campos $\{\Phi(x)\}$ que possuem todas essas simetrias. Aqui vamos lidar apenas com campos (quase-primários) escalares, onde

$$\phi'_\Delta(x') = \phi_\Delta(x), \quad x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \Lambda \in SO(d) \text{ ou } SO(d-1, 1).$$

Para uma transformação conforme geral, o campo se transforma como (Δ é a dimensão, ou “peso”, do campo)

$$\phi_\Delta(x) \rightarrow \phi'_\Delta(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/d} \phi_\Delta(x), \quad \Omega(x) = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-2/d},$$

portanto, para dilatações e especiais conforme temos, respectivamente,

$$\phi_\Delta(x) \rightarrow \phi'_\Delta(x') = \rho^{-\Delta} \phi_\Delta(x), \quad \phi_\Delta(x) \rightarrow \phi'_\Delta(x') = (1 + 2b \cdot x + b^2 x^2)^\Delta \phi_\Delta(x),$$

Ação de campo escalar (vou omitir o índice Δ) de uma CFT_d

$$-S = \int d^d x \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right), \quad V(\phi) \propto \phi^\alpha$$

- Invariância clássica sob dilatações $\Rightarrow$ potência α e Δ (clássico) são unicamente fixados

$$\Delta_{\text{cl}} = \frac{d-2}{2}, \quad \alpha = \frac{2d}{d-2}.$$

Conclusão

$$V(\phi) \sim \phi^{\frac{2d}{d-2}}$$

Casos importantes: $d = 4$, $V(\phi) \propto \phi^4$; $d = 2$, não há modelo conforme obedecendo Lei de Potência; $d = 1$ (mecânica), $V(\phi) \propto 1/\phi^2$.

Observável

Em geral, as quantidades mensuráveis em uma teoria de campo são descritas em termos de funções de n -pontos. Uma função de n -pontos é definida como

$$\langle \phi_{\Delta_1}(x_1) \phi_{\Delta_2}(x_2) \dots \phi_{\Delta_n}(x_n) \rangle.$$

A média pode significar que o sistema está em equilíbrio térmico (sistema estatístico) ou a média de um sistema quântico. Em particular, as CFT's possuem tantas simetrias que a forma das funções de dois e três pontos são completamente fixadas. Vamos ver como isso ocorre

Função de dois pontos

As funções de n -pontos são invariantes com relação as transformações conformes, assim:

- Translações e rotações: $\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = F_2(|x_1 - x_2|)$
- Dilatação: $\langle \phi'_1(x'_1) \phi_2(x'_2) \rangle = \rho^{-\Delta_1 - \Delta_2} \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle$,

As duas condições implicam em

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle \propto \frac{1}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}.$$

A transformação especial conforme $\left(\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{(1+2b \cdot x + b^2 x^2)^d} \right)$ implica que o resultado só é consistente para $\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta$.

Resultado Final

$$\langle \phi_{\Delta_1}(x_1) \phi_{\Delta_2}(x_2) \rangle = \delta_{\Delta_1 \Delta_2} \frac{C_{\Delta}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}}.$$

Função de três pontos

Definindo $x_{ij} = |x_i - x_j|$, então uma função de três pontos que respeita a simetria de Poincaré deve ter a forma

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = f(x_{12}, x_{13}, x_{23}).$$

Pela simetria de dilatação

$$f(\rho x_{12}, \rho x_{13}, \rho x_{23}) = \rho^{-\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3} f(x_{12}, x_{13}, x_{23}).$$

$$\Rightarrow f(\rho x_{12}, \rho x_{13}, \rho x_{23}) = \frac{C_{123}}{x_{12}^a x_{13}^b x_{23}^c}, \quad a + b + c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

Por fim, a consistência com a simetria especial conforme implica em

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{|x_{12}|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_{23}|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} |x_{31}|^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}}.$$

Resumo e próximo passo

- Criticalidade $\Rightarrow$ ausência de escala,
- $\text{CFT}_d \Rightarrow$ simetrias conformes e grupo $SO(d, 2)$ ou $SO(d + 1, 1)$ - $(d + 1)(d + 2)/2$ parâmetros,
- A menos de constantes multiplicativas, as funções de dois e três pontos são fixadas.

Próxima aula:

Existe uma geometria cujo grupo de isometrias seja exatamente $SO(d, 2)$?

Sim: o espaço Anti-de Sitter (AdS) em $d + 1$ dimensões.

Aula 2

O espaço Anti-de Sitter (AdS)

Geometria, isometrias e borda conforme

- **Retrospectiva:** Grupo de Simetrias de uma CFT;
- **Ideia de AdS_{d+1} :** Espaço com máxima simetria e curvatura constante e negativa;
- **Definição de AdS_{d+1} :** Hiperbolóide imerso em $\mathbb{R}_{d,2}$;
- **Algumas parametrizações de AdS_{d+1} :** Coordenadas globais e Poincaré;
- **Isometrias de AdS_{d+1} :** Coordenadas de Poincaré e relação com transformações conformes em d dimensões;

Na Aula 1 discutimos CFT's em d dimensões. Elas possuem um grupo de simetria maior que o de Poincaré, $SO(d-1, 1) \rtimes T_d$, o grupo $SO(d, 2)$.

Questão Central da Aula 2

Existe uma geometria lorentziana(euclidiana) cujo grupo de isometrias coincide com o grupo conforme $SO(d, 2)$ ($SO(d+1, 1)$)?

- Na Aula 1: o grupo conforme surgiu a partir da invariância de escala;
- Agora: buscamos a “realização geométrica” do mesmo grupo;

Ideia geral do espaço Anti-de Sitter

- Espaço-tempo lorentziano de máxima simetria e curvatura (constante) negativa
- Solução do vácuo das equações de Einstein com $\Lambda < 0$

AdS é o espaço-tempo lorentziano mais simétrico possível e curvatura negativa.

Equações de Einstein

Ação de Einstein-Hilbert - espaço-tempo em $d + 1$ dimensões

$$S = \int d^{d+1} \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2\kappa^2} (R - \Lambda) + \mathcal{L}_{mat} \right),$$

Equações do movimento:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}.$$

A solução de vácuo, $T_{\mu\nu} = 0$, implica em $R = \frac{2(d+1)}{d-1} \Lambda$, uma constante com o mesmo sinal de Λ . Aparentemente, nosso universo possui $\Lambda > 0$ (pequeno), aqui temos interesse em $\Lambda < 0$ - espaço AdS.

Definição de AdS_{d+1}

O espaço AdS_{d+1} é definido como um hiperboloide imerso em $\mathbb{R}^{d,2}$.

$$-(X^0)^2 + \sum_{i=1}^d (X^i)^2 - (X^{d+1})^2 = -L^2,$$

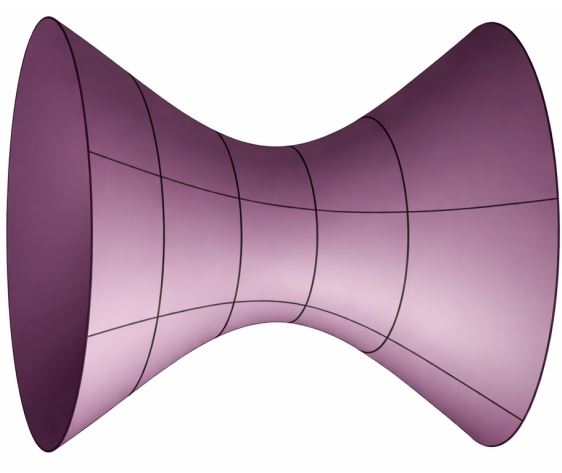
$$ds^2 = -(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^d (dX^i)^2 - (dX^{d+1})^2$$

- L : raio de curvatura de AdS
- O grupo $SO(d, 2)$ preserva essa superfície, $X^a \rightarrow \Lambda^a_b X^b$, $\Lambda \in SO(d, 2)$.

Mensagem importante

As simetrias conformes da CFT aparecem como isometrias de AdS .

Figura do hiperboloide



Algumas parametrizações de AdS

O hiperboloide pode ser parametrizado de várias formas e nem todas cobrem toda a superfície (refletindo propriedades do espaço)

- Coordenadas Globais (conformes)

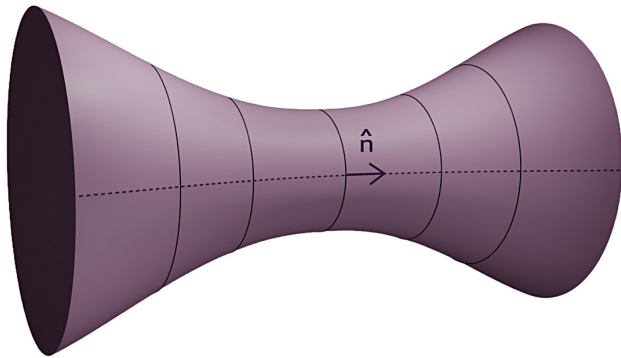
$$X^0 = L \frac{\sin(t/L)}{\cos \theta}; \quad X^I = L \omega^I \tan \theta, \quad I = 1, \dots, d; \quad X^{d+1} = L \frac{\cos(t/L)}{\cos \theta},$$
$$\omega^1 = \cos \alpha^1, \quad \omega^2 = \sin \alpha^1 \cos \alpha^2, \dots, \omega^d = \sin \alpha^1 \dots \sin \varphi,$$
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

O elemento de linha fica dado por:

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(-dt^2 + L^2 d\theta^2 + L^2 \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}^2 \right)$$

A borda do espaço é dada no limite $\theta \rightarrow \pi/2$ (equador) e $\theta = 0$ é o “Polo Norte” da “meia-esfera”.

Coordenadas globais em AdS



As coordenadas globais cobrem todo o espaço AdS. Superfícies com θ constante são círculos - tempo periódico.

- Coordenadas de Poincaré - cobrem metade da geometria

$$X^0 = \frac{z}{2L} \left[L + \frac{L}{z^2} \left(L^2 + (x^i)^2 - t^2 \right) \right],$$

$$X^i = \frac{L}{z} x^i, i = 1, \dots, d-1,$$

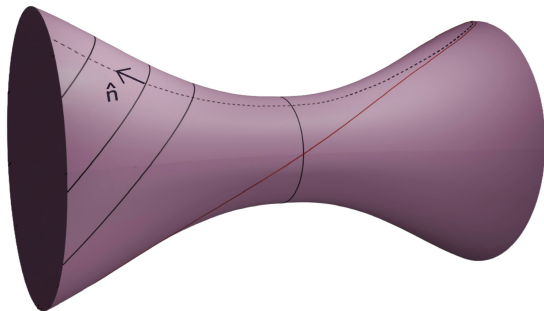
$$X^d = \frac{z}{2L} \left[L - \frac{L}{z^2} \left(L^2 - (x^i)^2 + t^2 \right) \right],$$

$$X^{d+1} = \frac{L}{z} t,$$

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left(dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right), \quad z > 0,$$

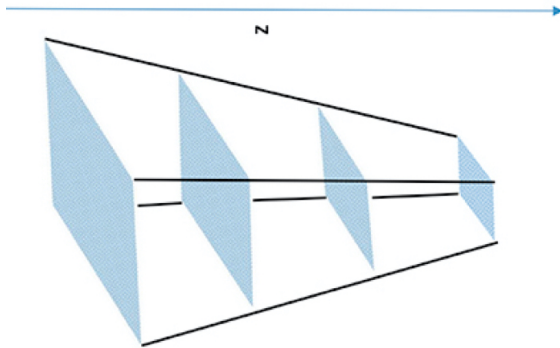
Repare que $X^0 - X^d = \frac{L^2}{z} > 0$

Coordenadas de Poincaré



Superfícies z constante são cortes em 45° . Nessas coordenadas a dilatação $(z, x^\mu) \rightarrow (\rho z, \rho x^\mu)$ é uma isometria.

Espaço AdS “fatiado” em Poincaré



Cada superfície z constante é um espaço de Minkowski reescalado pela razão $\frac{L}{z}$ - $z = 0$ é a borda, $z \rightarrow \infty$ é o horizonte (fim do sistema de coordenadas).

AdS_{d+1} nas coordenadas globais

A métrica global

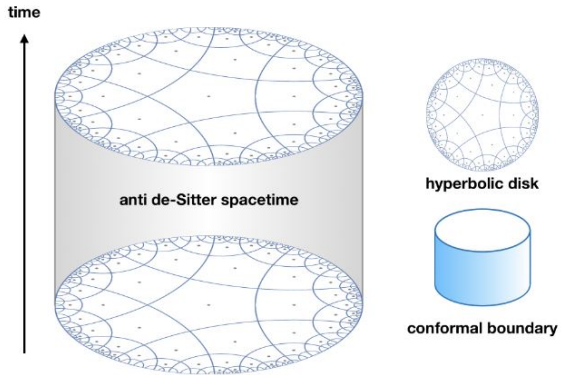
$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(-dt^2 + L^2 d\theta^2 + L^2 \sin^2 \theta d\Omega_{d-1}^2 \right),$$

com o tempo “desenrolado” ($t \in \mathbb{R}$), vemos que temos $\mathbb{R} \otimes (1/2)S^d$. Com uma projeção estereográfica a “meia-esfera” é mapeada num plano (de Poincaré)

$$ds^2 = \left(\frac{1 + \frac{r^2}{L^2}}{1 - \frac{r^2}{L^2}} \right)^2 \left(-dt^2 + \left(\frac{2L^2}{L^2 + r^2} \right)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j \right), \quad i, j = 1, \dots, d; \quad 0 < r = L \coth(\theta/2) < L.$$

Assim, AdS_{d+1} é descrito em termos de um “cilindro cheio”.

Cilindro de AdS



Descrição do espaço AdS.

Estrutura causal e borda do espaço AdS

Voltando para a métrica em termos da 1/2 esfera, temos que para trajetórias “radiais”

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} (-dt^2 + L^2 d\theta^2) = F^2(\theta) d\bar{s}^2, \quad F = \frac{1}{\cos \theta}.$$

A geometria gerada pela métrica não-física $d\bar{s}^2$ possui a mesma estrutura causal do espaço real, uma vez que geodésicas do tipo-luz implicam em $ds^2 = d\bar{s}^2 = 0$. A vantagem da métrica não-física é ser bem definida na borda, $\theta = \pi/2$.

Geodésicas radiais nulas

$$\theta_{\pm} = \pm \frac{t}{L} + \text{const}_{\pm}.$$

Consequência física

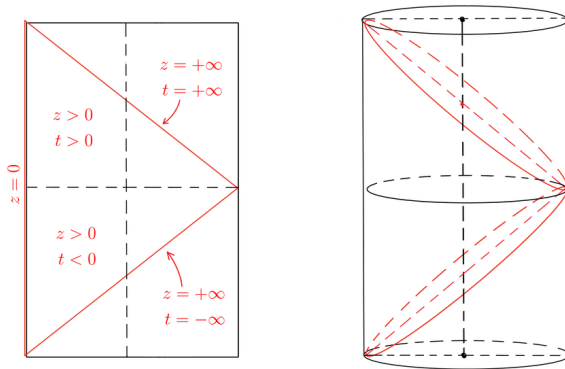
Feixes de luz chegam “ao fim do mundo” em um tempo finito. Como consequência é necessário especificar condições de contorno na borda, e.g. feixe de luz reflete. O espaço não é globalmente hiperbólico. Borda e *bulk* trocam informações.

- AdS não é globalmente hiperbólico - dada uma superfície tipo espaço, a evolução não é completamente determinada (é preciso impor condições de contorno na borda);
- É geodesicamente completo - parâmetro afim (tempo próprio) $\in \mathbb{R}$;
- Não é geodesicamente convexo - dois pontos arbitrários não podem ser ligados via uma curva geodésica.

Poincaré no Cilindro

Nas coordenadas de Poincaré

$$d\bar{s}^2 = \frac{z^2}{L^2} ds^2 = dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$



Metade da borda de AdS_{d+1} comporta um espaço inteiro de Minkowski em d dimensões.

O mais geral seria

$$d\bar{s}^2 = \frac{z^2}{L^2} \Omega^2(x, z) ds^2 = \Omega^2(x, z) \left(dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right), \quad \Omega^2(x, 0) \equiv \Omega^2(x) > 0.$$

Formalmente aplicando na borda $z = 0$

$$d\bar{s}^2 \Big|_{z=0} = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Se algo “mora” nessa borda, ele deve ser conforme.

Isometrias nas coordenadas de Poincaré

Como o grupo $SO(d, 2)$ atua na métrica

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)?$$

Uma transformação isométrica infinitesimal

$$z \rightarrow z' = z + \xi^z; \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu,$$

satisfaz a equação de Killing

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 \longrightarrow \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a = 2\xi_c \Gamma_{ab}^c,$$

Com a parametrização

$$(\xi^z, \xi^\mu) = (zG(z, x), \xi^\mu(z, x)) \Rightarrow (\xi_z, \xi_\mu) = \frac{L^2}{z^2} \left(zG(z, x), \bar{\xi}_\mu(z, x) \right), \bar{\xi}_\mu = \eta_{\mu\nu} \xi^\nu,$$

Símbolos de Christoffel não nulos

$$\Gamma_{zz}^z = -\frac{1}{z}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^z = \frac{\eta_{\mu\nu}}{z}, \quad \Gamma_{\nu z}^\mu = -\frac{\delta_\nu^\mu}{z}$$

Temos

$$\partial_z G(z, x) = 0 \longrightarrow G = G(x), \quad (1)$$

$$\partial_\mu \bar{\xi}_\nu + \partial_\nu \bar{\xi}_\mu = 2G(x)\eta_{\mu\nu}, \quad (2)$$

exatamente a equação de Killing conforme discutida na aula anterior com a identificação $\Omega(x) = 1 - G(x)$. A diferença é que $\xi^\mu(z, x)$. A solução geral da equação é:

$$\xi^z = z(\lambda - 2(b \cdot x)), \quad \xi^\mu = a^\mu + \lambda x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu - 2(b \cdot x)x^\mu + b^\mu x^2 + b^\mu z^2.$$

$$\xi^z = z(\lambda - 2(b \cdot x)), \quad \xi^\mu = a^\mu + \lambda x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu - 2(b \cdot x)x^\mu + b^\mu x^2 + b^\mu z^2.$$

Formalmente tomando o resultado na borda $z = 0$

$$\xi^z(0, x) = 0, \quad \xi^\mu(0, x) = a^\mu + \lambda x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu - 2(b \cdot x)x^\mu + b^\mu x^2,$$

temos exatamente a transformação conforme infinitesimal para uma CFT_d .

Conclusão

Esse resultado indica o “link” entre um modelo no *bulk* AdS_{d+1} que, quando estendido até a borda de forma adequada, é uma CFT_d .

Vamos “responder” de forma afirmativa a questão levantada hoje

Se as simetrias do bulk e da borda coincidem, será que toda a física gravitacional em AdS pode ser descrita por uma teoria conforme na fronteira?

Aula 3:

O princípio holográfico e a correspondência AdS/CFT

Aula 3

Holografia

Cálculo das Funções de 2 e 3 pontos

- Campo escalar em “AdS” ;
- Condições de Contorno ;
- Ação *on-shell* ;
- Princípio Holográfico ;
- Cálculo da Função de dois pontos ;

Observação inicial - Espaço hiperbólico

Versão euclidiana

Por uma questão técnica, nesta aula trabalharemos com a versão euclidiana do espaço Anti-de Sitter, isto é, o espaço hiperbólico - a métrica de Poincaré é global.

O espaço AdS_{d+1} euclidiano pode ser escrito como

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left(dz^2 + d\vec{x}^2 \right), \quad z > 0,$$

onde $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$.

- z : coordenada “radial”
- $z \rightarrow 0$: fronteira conforme

Campo escalar livre no bulk

Consideremos um campo escalar livre no bulk:

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g} \left(g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + m^2 \phi^2 \right).$$

- Campo definido no interior de AdS
- Dinâmica determinada por condições de contorno - a serem discutidas

Equação de movimento

A equação de Euler–Lagrange é

$$(\nabla^2 - m^2)\phi = 0.$$

Nas coordenadas de Poincaré:

$$\left(z^2 \partial_z^2 \phi - (d-1)z \partial_z + z^2 \partial_i^2 - m^2 L^2 \right) \phi = 0$$

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left(dz^2 + dx \cdot d\vec{x} \right).$$

Que pode ser descrita (por causa da simetria de translação em $\vec{x}$) em termos da Transformada de Fourier

$$\phi(z, \vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \phi_k(z).$$

Equação do Fourier

A equação do Fourier tem como solução regular em $z \rightarrow \infty$

$$\phi_k(z) = A_\nu(k) z^{d/2} K_\nu(kz), \quad \nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2}.$$

onde

$$K_\nu(x) \equiv \frac{\pi}{2 \sin(\pi \nu)} (I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)) \quad (\sim e^{-x}, \quad x \gg 1),$$
$$I_\nu \equiv \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l! \Gamma(l+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l},$$

sendo $I_\nu(x)$ a função de Bessel modificada.

Comportamento próximo à borda

Usando a forma assintótica de $K_\nu(x)$ para $x \ll 1$ ($\nu \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

$$K_\nu(x) \approx \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right) + \frac{\Gamma(-\nu)}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right)$$

Então

$$\begin{aligned} \phi(z, \vec{x}) \approx & z^{\frac{d}{2}-\nu} \left(\frac{\Gamma(\nu)}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} A_\nu(k) \left(\frac{k}{2}\right)^{-\nu} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \left(1 + \mathcal{O}((kz)^2)\right) + \\ & z^{\frac{d}{2}+\nu} \left(\frac{\Gamma(-\nu)}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} A_\nu(k) \left(\frac{k}{2}\right)^\nu e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \left(1 + \mathcal{O}((kz)^2)\right) \end{aligned}$$

Definindo as funções $\phi_0(\vec{x})$ e $\phi_1(\vec{x})$

$$\phi(z, \vec{x}) \approx z^{\Delta_-} \phi_0(\vec{x})(1 + \dots) + z^{\Delta_+} \phi_1(\vec{x})(1 + \dots), \quad \Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \nu, \quad \Delta_+ \equiv \Delta, \quad \Delta_- = d - \Delta,$$

onde o primeiro termo é o líder (termo dominante nas proximidades da borda) e o segundo o sublíder.

Sendo

$$\begin{aligned}\phi_0(\vec{x}) &\equiv \frac{\Gamma(\nu)}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} A_\nu(k) \left(\frac{k}{2}\right)^{-\nu} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \\ \phi_1(\vec{x}) &\equiv \frac{\Gamma(-\nu)}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} A_\nu(k) \left(\frac{k}{2}\right)^\nu e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}.\end{aligned}$$

Podemos eliminar $A_\nu(k)$ em favor de $\phi_0(\vec{x})$ que será identificado como nossa condição de contorno. Invertendo a transformada de Fourier

$$A_\nu(k) = \frac{2}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{k}{2}\right)^\nu \int d^d y \phi_0(\vec{y}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}}$$

Comportamento próximo à borda

Substituindo na equação de $\phi_1(\vec{x})$

$$\phi_1(\vec{x}) \equiv \int d^d y \left(\frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{k}{2} \right)^{2\nu} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right) \phi_0(\vec{y}).$$

Com o resultado

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{k}{2} \right)^{2\nu} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \frac{1}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(-\nu)} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2\Delta}}, \quad \nu \notin \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

temos

$$\phi_1(\vec{x}) \equiv \int d^d y \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(d/2 - \Delta)} \frac{1}{\pi^{d/2}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2\Delta}} \right) \phi_0(\vec{y}).$$

Resumo da solução do campo escalar

A solução (nula no limite $z \rightarrow \infty$) em termos da função $\phi_0(\vec{x})$ é

$$\begin{aligned}\phi(z, \vec{x}) &= z^{d-\Delta} \int d^d y \left(\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{2}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{kz}{2} \right)^\nu K_\nu(kz) \right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right) \phi_0(\vec{y}), \\ &\approx z^{d-\Delta} \int d^d y \left(\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right) \phi_0(\vec{y}) = z^{d-\Delta} \int d^d y \left(\delta^d(\vec{x} - \vec{y}) \right) \phi_0(\vec{y}), \\ &= z^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x}) + \dots, \quad z \ll L.\end{aligned}$$

Ou seja, $\phi_0(\vec{x})$ é a condição de contorno - determina completamente a solução. Incluindo o termo sublíder:

$$\phi(z, \vec{x}) \approx z^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x})(1 + \dots) + z^\Delta \phi_1(\vec{x})(1 + \dots), \quad z \ll L$$

O campo $\phi(z, \vec{x})$ é um escalar com relação as transformações de isometrias de AdS_{d+1} , logo $\phi(\lambda z, \lambda \vec{x}) = \phi(z, \vec{x})$. Assim, pela forma assintótica, fica evidente que

$$\phi_0(\lambda \vec{x}) = \lambda^{-(d-\Delta)} \phi_0(\vec{x}), \quad \phi_1(\lambda \vec{x}) = \lambda^{-\Delta} \phi_1(\vec{x}).$$

Podemos verificar que o resultado é consistente com

$$\phi_1(\vec{x}) \equiv \int d^d y \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(d/2 - \Delta)} \frac{1}{\pi^{d/2}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2\Delta}} \right) \phi_0(\vec{y}).$$

Encerramos nosso estudo do escalar massivo em AdS_{d+1} .

Pergunta importante do dia: E aí? - parte 1

Voltando para a CFT. Em Teorias de Campos, os propagadores (funções de n -pontos) podem ser descritos pelo formalismo de Feynman

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(\vec{x}_1) \dots \mathcal{O}_\Delta(\vec{x}_n) \rangle = \left\langle \int D\mathcal{O}_\Delta \mathcal{O}_\Delta(\vec{x}_1) \dots \mathcal{O}_\Delta(\vec{x}_n) e^{-S[\mathcal{O}_\Delta]} \right\rangle_{CFT_0}.$$

Um truque para descrever isso é introduzir uma fonte ($j(\vec{x})$) ao sistema - a equação de movimento torna-se não-homogêneo. Isso é feito com o acréscimo de um termo na ação:

$$S_{CFT} = S_{CFT_0} + \int d^d x j(\vec{x}) \mathcal{O},$$

então

$$\mathcal{Z}[j] \equiv \langle e^{-S_{CFT}} \rangle = \left\langle e^{\int d^d x j(\vec{x}) \mathcal{O}_\Delta} \right\rangle_{CFT_0}, \text{ funcional gerador}$$

o valor médio (na CFT sem fonte) do termo de fonte.

Pergunta importante do dia: E aí? - parte 2

Pela simetria de dilatação, temos que $\mathcal{O}(\lambda\vec{x}) = \lambda^{-\Delta}\mathcal{O}(\vec{x})_{\Delta}$. Por consistência, o novo termo de interação na ação força a fonte a se transformar da seguinte forma $j(\lambda\vec{x}) = \lambda^{-(d-\Delta)}j(\vec{x})$.

E o truque?

Repare que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}_{\Delta}(\vec{x}_1) \dots \mathcal{O}_{\Delta}(\vec{x}_n) \rangle_{CFT} &= \left\langle \int D\mathcal{O}_{\Delta} \mathcal{O}_{\Delta}(\vec{x}_1) \dots \mathcal{O}_{\Delta}(\vec{x}_n) e^{\int d^d x j(\vec{x}) \mathcal{O}_{\Delta}(\vec{x})} \right\rangle_{CFT_0}, \\ &= \frac{\delta^n \mathcal{Z}}{\delta j(\vec{x}_1) \dots \delta j(\vec{x}_n)}\end{aligned}$$

Após o cálculo, pode-se tomar o limite $j(\vec{x}) \rightarrow 0$, então

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta}(\vec{x}_1) \dots \mathcal{O}_{\Delta}(\vec{x}_n) \rangle_{CFT_0} = \frac{\delta^n \mathcal{Z}[j]}{\delta j(\vec{x}_1) \dots \delta j(\vec{x}_n)} \Big|_{j(\vec{x})=0}.$$

Pelas semelhanças que temos entre CFT_d e AdS_{d+1} , a conjectura AdS/CFT diz que: se $L \gg l_{pl}$ (comprimento de Planck), então o funcional gerador de uma classe de $CFT's_d$ é determinado pela ação *on-shell* de um campo em AdS_{d+1} sendo o termo líder da expansão a fonte e o termo sublíder o valor esperado do operador com dimensão conforme Δ . Na prática, a correspondência é:

$$\mathcal{Z}[\phi_0] = e^{-S_{AdS}} \Big|_{\text{on-shell}}.$$

Vamos entender isso calculando a ação *on-shell* do nosso campo escalar em AdS_{d+1} .

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{|g|} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2 \right), \\ &= -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{|g|} \left[\nabla_\mu (\phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - \phi (\square - m^2) \phi^2 \right].\end{aligned}$$

Usando a equação de movimento, o segundo termo desaparece. O primeiro termo é uma derivada total, pois $\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} V^\mu)$. Nas coordenadas de Poincaré, a ação reduz-se ao termo de fronteira:

$$\mathcal{S}_{\text{on-shell}} = -\frac{1}{2} \int d^d x \frac{z^{2-(d+1)}}{L^{2-(d+1)}} \phi \partial_z \phi \Big|_{z=\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Substituindo a assintótico

$$\phi(z, \vec{x}) \approx z^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x})(1 + \dots) + z^{\Delta} \phi_1(\vec{x})(1 + \dots),$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{on-shell}} &= -\frac{1}{2} \int d^d x \frac{z^{1-d}}{L^{1-d}} \left(z^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x}) + z^{\Delta} \phi_1(\vec{x}) \right) \partial_z \left(z^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x}) + z^{\Delta} \phi_1(\vec{x}) \right) \Big|_{z=\varepsilon}, \\ &= -\frac{(d-\Delta)}{2L} \int d^d x \frac{\varepsilon^{-d}}{L^{-d}} \left(\varepsilon^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x}) \right)^2 - \frac{d L^{d-1}}{2} \int d^d x \phi_0(\vec{x}) \phi_1(\vec{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\nu}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{\text{on-shell}} = -\frac{(d-\Delta)}{2L} \int d^d x \frac{\varepsilon^{-d}}{L^{-d}} \left(\varepsilon^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x}) \right)^2 - \frac{d L^{d-1}}{2} \int d^d x \phi_0(\vec{x}) \phi_1(\vec{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\nu})$$

O primeiro termo é singular no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, porém ele pode ser reescrito na forma covariante

$$-\frac{(d-\Delta)}{2L} \int_{\partial\mathcal{M}} d^d x \sqrt{|\gamma|} \phi^2 \equiv -\mathcal{S}_{CT}$$

Esse é um termo de borda chamado de “contato”. Portanto ele pode ser cancelado (sem alterar as equações do movimento) com o acréscimo de um contra-termo $\mathcal{S}_{CT}$.

$$\mathcal{S} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} + \mathcal{S}_{CT}.$$

Resultado Final no limite $z = \varepsilon \rightarrow 0$

$$\tilde{S}_{\text{on-shell}} = -\frac{d L^{d-1}}{2} \int d^d x \phi_0(\vec{x}) \phi_1(\vec{x})$$

onde

$$\phi_1(\vec{x}) = \int d^d y \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(d/2 - \Delta)} \frac{1}{\pi^{d/2}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2\Delta}} \right) \phi_0(\vec{y}).$$

No fim temos a mesma estrutura do termo de interação da CFT quando $\phi(0)$ é identificado como a fonte, mas eles não são independentes. Eliminando ϕ_1

$$\tilde{S}_{\text{on-shell}} = -\frac{d L^{d-1}}{2\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(d/2 - \Delta)} \int d^d x_1 \int d^d x_2 \frac{\phi_0(\vec{x}_1) \phi_0(\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^{2\Delta}}.$$

Implementando o Princípio Holográfico

A função de um ponto é calculada como

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}_\Delta(\vec{x}) \rangle &= \frac{\delta}{\delta \phi_0(\vec{x})} e^{-\tilde{S}_{\text{on-shell}}[\phi_0]} = \frac{d L^{d-1}}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(d/2 - \Delta)} \int d^d x' \frac{\phi_0(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^{2\Delta}} + \mathcal{O}(\phi_0^2), \\ &= d L^{d-1} \phi_1(\vec{x}) + \mathcal{O}(\phi_0^2), \quad \frac{\delta \phi(\vec{x}_1)}{\delta \phi(\vec{x}_2)} = \delta^d(\vec{x}_1 - \vec{x}_2).\end{aligned}$$

Tomando $\phi_0 = 0$ (nossa CFT de interesse) esse valor médio torna-se nulo - uma consequência da simetria conforme. Por outro lado, o resultado é interessante, ϕ_1 é proporcional a resposta linear do valor médio do operador de interesse quando a fonte é ligada. Em problemas mais complexos esse resultado é interessante. Se o resultado for não nulo no limite sem fonte, então temos uma quebra espontânea da simetria conforme.

Função de dois pontos

Finalmente vamos calcular, via princípio holográfico, um resultado não trivial que conhecemos de uma CFT (sem fontes). Tomando duas derivadas do funcional gerador

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(\vec{x}_1) \mathcal{O}_\Delta(\vec{x}_2) \rangle = \frac{\delta^2}{\delta\phi_0(\vec{x}_1)\delta\phi_0(\vec{x}_2)} e^{-\tilde{S}_{\text{on-shell}}[\phi_0]} \Big|_{\phi_0=0} = \frac{d L^{d-1}}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(d/2 - \Delta)} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^{2\Delta}}.$$

O mesmo pode ser feito com a função de três pontos, mas aí é preciso ter um termo cúbico em ϕ .

Correspondência para um campo de *spin* s

Uma forma pragmática de usar o princípio holográfico é: com a solução perto da borda

$$\Phi^{(s)}(z, \vec{x}) \approx z^{\Delta_- - s} \Phi_0^{(s)}(\vec{x}) + z^{\Delta_+ - s} \Phi_1(\vec{x}), \quad \Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \nu_s, \quad \nu_s = \sqrt{\left(\frac{d}{2} - s\right)^2 + m^2 L^2},$$

identifica-se $\Phi_0^{(s)}$ como a fonte e $\Phi_1^{(s)}(\vec{x}) \propto \langle \mathcal{O}_{\Delta}^{(s)}(\vec{x}) \rangle$ (valor médio do operador), $\Delta = \Delta_+$. A função de dois pontos é

$$G^{s_1, s_2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \frac{\Delta \langle \mathcal{O}_{\Delta}^{(s_2)}(\vec{x}_2) \rangle}{\delta \phi_0^{(s_1)}(\vec{x}_1)} \propto \frac{\Delta \Phi_1^{(s_2)}(\vec{x}_2)}{\delta \phi_0^{(s_1)}(\vec{x}_1)}.$$

Para o campo “eletromagnético” ($s = 1$ e $m = 0$), $\Delta_+ = d - 1$, $\Delta_- = 1$, logo

$$A^{\mu}(z, \vec{x}) \approx \Phi_0^{\mu}(\vec{x}) + z^{d-2} \Phi_1^{\mu}(\vec{x})$$

O princípio Holográfico pode ser usado para calcular

- Funções de mais pontos;
- Fluxos (não-perturbativos) do grupo de renormalização da CFT perturbada via DWs - espectro de plasma de Quark-Gluons;
- Propriedades termodinâmicas de sistemas fortemente correlacionados (supercondutor): μ , ρ , T e suas transições de fase (expoentes críticos) - via buracos negros assintoticamente AdS;
- Entropia de emaranhamento - conjectura de Ryu-Takayanagi;

É um mecanismo prático (cuja origem não é totalmente entendida) para estudarmos sistemas em regimes não perturbativos (sem acoplamentos pequenos).

Lição do dia

O tópico deste minicurso, o princípio holográfico, coloca em pé de igualdade duas teorias de dimensões diferentes e em regimes distintos (uma clássica e a outra quântica). É algo no mínimo curioso...

A ideia aqui foi ajudar a formular uma para uma visão geométrica e conceitual mínima do princípio holográfico e da dualidade AdS/CFT.

Questões, comentários e discussões são muito bem-vindos.

Muito obrigado!