

Uma Introdução à Eletrodinâmica via Conexões de Cartan-Ehresmann

Leonardo Câmara

Versão preliminar de 14 de janeiro de 2026

Sumário

Introdução	iii
1 O eletromagnetismo e a relatividade restrita	1
1.1 O eletromagnetismo clássico	1
1.1.1 As equações de Maxwell	1
1.1.2 Potenciais de calibre	3
1.1.3 Potenciais de calibre do monopolo e do solenóide	6
1.2 A relatividade restrita segundo Poincaré	11
1.2.1 Motivação	11
1.2.2 O princípio da relatividade e o campo eletromagnético	12
1.2.3 O grupo de Lorentz e o espaço de Poincaré-Minkowski	15
1.2.4 Quadrivetores e os invariantes do eletromagnetismo relativístico	19
1.3 A gravitação relativística	26
1.4 Quadrivetores e geometria lorentziana	31
2 Formulando o eletromagnetismo em termos de formas	35
2.1 Tensores e formas diferenciais	35
2.1.1 Tensores	36
2.1.2 Formas diferenciais	37
2.1.3 Formas diferenciais em coordenadas locais	40
2.2 As equações de Maxwell em termos de formas	41
2.2.1 O operador $*$ de Hodge em $\mathbb{R}^{1,3}$ e a codiferencial	41
2.2.2 A forma eletromagnética e o tensor carga-corrente	44
2.2.3 Os potenciais de calibre	47
2.2.4 O solenóide e o monopólo em formas diferenciais	48
2.2.5 A invariância das equações de Maxwell por transformações de Lorentz	50
2.2.6 A forma eletromagnética e a força de Lorentz.	53
3 Conexões em espaços fibrados	57
3.1 Variedades diferenciáveis	57
3.2 Fibrados em retas e fibrados em círculos	58

3.2.1	Fibrados em retas complexas	59
3.2.2	Fibrados em círculos	64
3.2.3	Fibrados associados e hermitianos	70
3.3	Conexões em fibrados	72
3.3.1	Conexões em fibrados em retas complexas	72
3.3.2	Conexões em fibrados por círculos	80
3.3.3	Conexões métricas	83
3.4	Formas de Chern e Classes de Chern	93
4	Aplicações em teoria de calibre	101
4.1	Elementos de teoria clássica de campos	101
4.1.1	Um breve histórico	101
4.1.2	O formalismo lagrangeano	102
4.1.3	Alguns exemplos	107
4.1.4	Simetrias	110
4.2	Eletromagnetismo e teoria de Calibre	112
4.2.1	Quantização canônica: A regra de correspondência	112
4.2.2	Transformações locais e a equação de Schrödinger modificada	117
4.2.3	Conexões e derivada de calibre: a geometrização do sistema	121
4.3	Monopolos magnéticos	124
4.3.1	Revisitando o potencial de calibre do monopolo	124
4.3.2	A condição de quantização de Dirac	124
4.3.3	Geometrizando a evolução do sistema	125
4.4	Efeito Aharonov-Bohm	127

No Man is an Iland

No man is an Iland, intire of itselfe; every man
is a peece of the Continent, a part of the maine;
if a Clod bee washed away by the Sea, Europe
is the lesse, as well as if a Promontorie were, as
well as if a Manor of thy friends or of thine
owne were; any mans death diminishes me,
because I am involved in Mankinde;
And therefore never send to know for whom
the bell tolls; It tolls for thee.

MEDITATION XVII

Devotions upon Emergent Occasions

John Donne

Introdução

O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma introdução ao eletromagnetismo e suas relações com a teoria de calibre, tendo como pano de fundo dois exemplos simples: o solenoide e o monopolo magnético. Do ponto de vista físico, o trabalho é dividido em três partes bem definidas: A formulação clássica, a formulação relativística e a formulação quântica. Historicamente, a cada uma delas corresponde um modelo matemático específico: A formulação vetorial, que é uma adaptação da versão original devido a James Clerk Maxwell, atende à teoria eletrodinâmica clássica. Já o advento da teoria da relatividade especial remete ao modelo eletromagnético via formas diferenciais devido Élie Cartan. Finalmente, a formulação quântica, via equação de Schrodinger modificada, remete ao modelo atual da teoria de calibre, i.e., à formas de conexão de Cartan-Ehresmann sobre fibrados principais. No caso particular do eletromagnetismo, iremos nos contentar em estudar os fibrados em retas complexas e fibrados em círculos.

O texto está dividido em quatro capítulos. No primeiro deles, iremos revisitar a teoria clássica e abordar seu comportamento em face da relatividade restrita. Nosso fio guia será o trabalho seminal de Henri Poincaré, cuja ideia central é o princípio da relatividade enunciado por ele em 1904 ([78]). Este princípio filosófico irá nos remeter à existência de um grupo de invariância para o sistema físico determinado pelas equações de Maxwell. Tal grupo é denominado por Poincaré de grupo de Lorentz. É neste momento que percebemos que o campo elétrico e o campo magnético se combinam para formar um novo objeto. As simetrias determinadas pelo grupo de Lorentz serão ainda as responsáveis pelo surgimento da noção de quadrivetores covariantes. Este será o tema de estudo do restante deste capítulo.

No segundo capítulo iremos recordar o conceito de tensores e formas diferenciais e aplicá-los ao eletromagnetismo. A finalidade deste ferramental matemático é permitir uma formulação das equações de Maxwell em termos de formas diferenciais. Aqui o objeto matemático oriundo da amálgama entre o campo elétrico e campo magnético será expresso como a chamada 2-forma eletromagnética. As equações homogêneas serão reescritas em termos da derivada exterior de Cartan. No entanto, as equações inhomogêneas irão necessitar de um pouco mais de sofisticação, i.e., da introdução do conceito de ope-

radador $*$ de Hodge:

$$\begin{aligned}dF &= 0, \\ *d * F &= J,\end{aligned}$$

onde J é oriundo do campo de vetores (quadrivetor) carga-corrente. Por uma questão de simplicidade, em nossa definição do operador de Hodge, a métrica de Lorentz estará implicitamente embutida. Iremos nos dedicar ao estudo detalhado desta reformulação nos exemplos supracitados, i.e., o monopolo e o solenoide. Por fim, iremos revisitar a invariância das equações de Maxwell por transformações de Lorentz com esta nova face.

O terceiro capítulo será puramente geométrico e nele iremos tratar dos fibrados em retas complexas e fibrados em círculos. Iremos dar especial atenção aos fibrados hermitianos, pois estes estarão associados aos fibrados em círculos e irão modelar a formulação quântica do eletromagnetismo. Neste capítulo, iremos introduzir ainda o conceito de conexão em fibrado em círculos e fibrados hermitianos, estabelecendo a correspondência entre eles. Por fim, iremos nos debruçar sobre as classes de Chern em fibrados Hermitianos e associados.

O quarto capítulo trata da quantização canônica, da equação de Schrödinger modificada e da relação da teoria física do potencial de calibre com a geometria introduzida nos dois capítulos anteriores. Veremos como as soluções da equação de Schrödinger modificada irão assumir a forma de seções locais de um fibrado hermitiano natural. Neste fibrado, os potenciais de calibre irão se materializar como formas de conexão no fibrado hermitiano construído a partir das soluções locais da equação de Schrödinger modificada. Essa associação se dará de maneira canônica, uma vez estabelecido o princípio da invariância do calibre de Weyl. Neste contexto, a forma eletromagnética será interpretada como a curvatura de tal conexão.

Capítulo 1

O eletromagnetismo e a relatividade restrita

Neste capítulo apresentaremos a transição da teoria eletromagnética do modelo clássico para o modelo relativístico. Em termos matemáticos, isso se expressa na conversão da formulação vetorial para a formulação em termos de formas diferenciais.

1.1 O eletromagnetismo clássico

Iremos recordar a formulação clássica das equações de Maxwell através do cálculo vetorial em três dimensões. A menos de menção em contrário, ao longo deste texto iremos considerar apenas aplicações de classe C^∞ .

1.1.1 As equações de Maxwell

Em resposta aos experimentos de Michael Faraday, em 1865 James Clerk Maxwell apresentou sua formulação das leis do eletromagnetismo na forma de 20 equações baseadas na teoria dos números quatérnios ([58]), mais tarde simplificadas para oito equações ([59]). Na esteira dos trabalhos de Hermann Grassmann ([42, 43]), Oliver Heaviside observou que tal apresentação poderia ser aperfeiçoada e simplificada ([46]), apresentando quatro equações vetoriais, que serão descritas a seguir.

Em síntese, a teoria de Maxwell do eletromagnetismo pode ser descrita como o estudo dos campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ definidos sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que, eventualmente, dependem do tempo. Mais precisamente, dadas duas aplicações $\mathbf{E}, \mathbf{B}: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, estuda-se como esses interagem entre si, como são influenciados por uma corrente elétrica $\mathbf{j}: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ e por uma densidade de carga $\rho: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e ainda como interagem com uma partícula pontual carregada. Esta última interação é descrita pela força de Lorentz

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.1)$$

onde $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2}$ é a aceleração da partícula que percorre a trajetória descrita por $x(t)$. As demais interações são dadas pelas equações de Maxwell-Heaviside

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \quad (1.5)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo, duas constantes físicas.

Em geral, consideram-se os sistemas físicos confinados, i.e., existe alguma superfície compacta S tal que $\mathbf{j}$ e ρ se anulam identicamente em $S \cup U$, onde U é a componente conexa do infinito de $\mathbb{R}^3 \setminus S$. Nesse caso, as equações de Maxwell têm uma importante consequência garantida pelo seguinte resultado:

Proposição 1.1 *A carga total Q , dada por*

$$Q = \int_{\Omega} \rho dx,$$

permanece constante ao longo do tempo t .

Demonstração. *Primeiramente, verifiquemos a validade da equação*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (1.6)$$

conhecida como equação de continuidade. Tomando-se o divergente de (1.5), temos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \nabla \times \mathbf{B} \right) &= \nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \right) \\ \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \left(-\frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\epsilon_0} \right) \\ \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} - 0 &= \left(-\frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\epsilon_0} \right). \end{aligned}$$

Assim, segue de (1.4) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\epsilon_0 \partial t} - 0 &= \left(-\frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\epsilon_0} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot \mathbf{j} \end{aligned}$$

Derivando-se a carga total em relação ao tempo e utilizando-se a equação de continuidade, encontramos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} \rho dx \right) \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx \\
 &= \int_{\Omega} -(\nabla \cdot \mathbf{j}) dx \\
 (\text{Teo. Gauss}) &= - \int_S \langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle dA
 \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue do teorema da derivação sob o sinal da integral e a última igualdade segue do teorema de Gauss da análise vetorial. Como $\mathbf{j}$ se anula identicamente sobre S , concluímos que $\langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle \equiv 0$. Logo,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Ou seja, a carga total é preservada, o que justifica o nome da equação (1.6). ■

1.1.2 Potenciais de calibre

A abordagem de Heaviside cria um novo arcabouço geométrico-diferencial que permite novas interpretações da teoria. Uma delas é o conceito de potencial, que será introduzido a seguir.

Observe que a equação de *Maxwell homogênea* $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ é automaticamente satisfeita se $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ para algum campo $\mathbf{A}$, pois $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. Assumindo-se a existência de tal campo $\mathbf{A}$ e substituindo-se na segunda equação homogênea, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \Rightarrow \\
 0 &= \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \\
 &= \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \nabla \times \mathbf{E} \\
 &= \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} \right).
 \end{aligned}$$

Note que tal equação é automaticamente satisfeita se $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} = -\nabla \phi$ para alguma função diferenciável ϕ , pois $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$. À primeira vista, a existência de tais $\mathbf{A}$ e ϕ parece um tanto artificial. No entanto, veremos que sua existência pode ser garantida localmente (Lema de Poincaré). Assim, tornar-se natural buscarmos soluções para as equações de Maxwell-Heaviside da forma

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},\end{aligned}\tag{1.7}$$

uma vez que nessas condições as equações homogêneas são automaticamente satisfeitas. Evidentemente, não basta encontrar um campo de vetores $\mathbf{A}$ e uma função diferenciável ϕ , pois ainda temos que reformular as outras duas equações de Maxwell-Heaviside em termos de $\mathbf{A}$ e ϕ . É o que faremos no seguinte resultado.

Lema 1.2 *Um par $\mathbf{A}$ e ϕ , definido através da relação (1.7), fornece soluções para as equações de Maxwell se, e somente se, as seguintes equações são satisfeitas*

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \tag{1.8}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \nabla \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \tag{1.9}$$

Demonstração. Substituindo-se (1.7) em (1.4), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\epsilon_0} &= \nabla \cdot \mathbf{E} \\ &= \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\Delta\phi - \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}.\end{aligned}$$

Subtraindo-se $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ dos dois lados e rearranjando-se os termos, encontramos

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right].$$

Substituindo-se esta expressão em (1.5), obtemos

$$\begin{aligned}-\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \nabla \times \mathbf{B} \\ &= \frac{\partial (-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})}{\partial t} - c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \frac{\partial (-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})}{\partial t} - c^2 (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}) \\ &= -\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - c^2 (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Por fim, multiplicando-se ambos os lados por $\frac{1}{c^2}$ e rearranjando-se os termos, temos

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \nabla \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right].$$

■

Assim, passamos do problema de resolver as quatro equações (1.2) - (1.5) para o de resolver as duas em (1.8), (1.9).

O seguinte resultado é de fundamental importância, pois garante que tais soluções não são únicas.

Lema 1.3 *Se o par $\mathbf{A}$ e ϕ é solução para as equações de Maxwell, então para qualquer função diferenciável χ , a transformação*

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi,\end{aligned}\tag{1.10}$$

produz novas soluções.

Demonstração. De fato, basta verificar que tal transformação não altera os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, o que segue de um cálculo simples uma vez que se substitua (1.10) em (1.7). ■

A invariância garantida pelo resultado anterior foi logo assimilada pela comunidade científica e se mostrou uma poderosa ferramenta para se resolver as equações diferenciais provenientes da teoria de Maxwell. O par $(\phi, \mathbf{A})$ satisfazendo as equações (1.8), (1.9) é chamado de *potencial de calibre* e (1.10) de *transformação de calibre*. Mais adiante conheceremos a motivação dessa nomenclatura e por que a invariância por transformações de calibre é considerada o princípio fundamental da teoria eletromagnética. Por ora, vejamos como esse resultado pode nos ajudar a simplificar o estudo das equações de Maxwell-Heaviside.

Exemplo 1.4 *Seja $(\mathbf{A}', \phi')$ uma solução do sistema de equações (1.8), (1.9), suponhamos que exista, $\chi(t, x)$ tal que*

$$\Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t},\tag{1.11}$$

então podemos encontrar uma solução $(\mathbf{A}, \phi)$ tal que $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$. De fato, tomando-se $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \chi$ e $\phi = \phi' - \frac{\partial \chi}{\partial t}$, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \nabla \cdot (\mathbf{A}' + \nabla \chi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\phi' - \frac{\partial \chi}{\partial t})}{\partial t} \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A}' + \nabla \cdot \nabla \chi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \\ &= \left(\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right) + \left(\nabla \cdot \nabla \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \\ &= \left(\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right) + \left(-\nabla \cdot \mathbf{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Nesse caso, as equações (1.8) e (1.9) se reduzem a

$$\begin{aligned}\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0},\end{aligned}$$

que são mais simples de resolver do que (1.8) e (1.9).

Observação 1.5 Uma equação da forma (1.11) é chamada de uma equação da onda com fonte.

A escolha de $\mathbf{A}$ e ϕ dada no exemplo anterior é chamada de *calibre de Lorentz*. Naturalmente se apresenta a seguinte questão: Os campos $\mathbf{A}$ e ϕ têm alguma relevância física ou são resultado de mera manipulação matemática? Mais adiante veremos uma resposta plausível para tal pergunta. A seguinte observação será de grande utilidade nesse sentido.

Exemplo 1.6 Em termos dos potenciais de calibre, a expressão para a força de Lorentz é dada por

$$m\mathbf{a} = q \left[\nabla (\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle - \phi) - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right].$$

De fato, segue de (1.1) e de (1.7) que

$$\begin{aligned}m\mathbf{a} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= q \left[-\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right].\end{aligned}$$

Sabemos do cálculo vetorial que $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle - \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{A}$ e que

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x_j} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{A}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}m\mathbf{a} &= q \left[-\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{A} + \nabla \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle - \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{A} \right] \\ &= q \left[-\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle \right] \\ &= q \left[\nabla (\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle - \phi) - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right].\end{aligned}$$

1.1.3 Potenciais de calibre do monopolo e do solenóide

Concluiremos esta seção inicial com dois exemplos que serão centrais em nosso estudo.

Exemplo 1.7 (Potencial de calibre do solenóide) Considere um fio condutor em formato de hélice com raio a e que se estende infinitamente para cima e para baixo. Tal aparato é chamado solenóide. Consideremos, por conveniência, este enrolado em torno do eixo z . Então ele produz um campo magnético

$$\mathbf{B}(t, x) = \begin{cases} (0, 0, B_0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a, \\ (0, 0, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a, \end{cases}$$

e não produz nenhum campo elétrico (cf. [44, §5.3.3], [32, Vol II, §13.5]). Como $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são constantes, então satisfazem as equações de Maxwell. Vamos agora determinar um potencial de calibre para este campo. A primeira observação que fazemos é que $\mathbf{E}(t, x) \equiv 0$; logo, podemos considerar $\phi = 0$. Portanto, nos preocuparemos apenas com $\mathbf{A}$. Dessa forma, dentro do solenoide (i.e., para $\rho \leq a$) a escolha $\mathbf{A}(t, x) = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0)$ serve como potencial, pois

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left[\frac{B_0}{2}(-y, x, 0) \right] = (0, 0, B_0).$$

No entanto, $\mathbf{A}$ não pode ser estendido a todo o domínio com essa mesma expressão, pois $\mathbf{B} = 0$ fora do solenóide. Poderíamos, à primeira vista, imaginar que

$$\mathbf{A}(t, x) = \begin{cases} \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a, \\ (0, 0, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a, \end{cases}$$

seria uma boa escolha para o potencial, mas essa escolha conduziria a inconsistências. Por exemplo, considere um disco D fechado de raio $\rho > a$ contido no plano xy . Por definição, o fluxo magnético que passa por D é dado por

$$\Phi = \int_D (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dA = B_0 \int_{D'} dA = B_0 \pi a^2,$$

onde D' é o disco de raio $\rho = a$. Por outro lado, segue do Teorema de Stokes que

$$\Phi = \int_D \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = \int_D (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dA = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

onde Γ é a fronteira de D . Logo, devemos ter um potencial que gere um campo magnético nulo fora do solenóide e que não conduza a nenhuma contradição em termos do fluxo magnético. Para encontrarmos um potencial adequado para a região fora do solenóide, iremos nos valer das seguintes observações:

- (i) Dentro do solenóide o potencial é circular ao redor do eixo z , então podemos esperar comportamento similar fora, i.e., $\mathbf{A} \approx (-y, x, 0)$;
- (ii) Para qualquer disco no plano xy com raio $\rho_0 > a$, a integral de linha de $\mathbf{A}$ sobre sua fronteira deve ter o valor constante $B_0 \pi a^2$. Mas note que essa integral é proporcional

ao raio ρ e ao módulo do campo $\mathbf{A}$; logo, $|\mathbf{A}|$ deve variar de maneira inversamente proporcional a ρ , i.e.,

$$|\mathbf{A}| \approx \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

Esses dois argumentos combinando nos sugerem a buscar $\mathbf{A}$ fora do solenoide da forma

$$\mathbf{A} = k \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{(x^2 + y^2)}, 0 \right).$$

Observe que este $\mathbf{A}$ conduz a um campo magnético identicamente nulo fora do solenoide, uma vez que

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times \left[k \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{(x^2 + y^2)}, 0 \right) \right] \\ &= k \left(\partial_y 0 - \partial_z \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)} \right), \partial_z \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)} \right) - \partial_x 0, \partial_x \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)} \right) - \partial_y \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)} \right) \right) \\ &= k(0, 0, 0). \end{aligned}$$

Portanto, resta-nos apenas encontrar o valor da constante k . Isso se obtém ao se considerar o valor do fluxo magnético através de um disco de raio $\rho_0 > a$. Parametrizando-se a fronteira do disco por $r(t) = (\rho_0 \cos(t), \rho_0 \sin(t), 0)$ com $t \in (0, 2\pi)$, obtemos

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}' dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle k \left(\frac{-\rho_0 \sin(t)}{\rho_0^2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)}, \frac{\rho_0 \cos(t)}{\rho_0^2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)}, 0 \right), (-\rho_0 \sin(t), \rho_0 \cos(t), 0) \right\rangle dt \\ &= k \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0^2 \sin(t)^2 + \rho_0^2 \cos(t)^2}{\rho_0^2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)} dt \\ &= 2k\pi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Phi = B_0 \pi a^2 \Leftrightarrow 2k\pi = B_0 \pi a^2 \Leftrightarrow k = \frac{B_0 a^2}{2} = \frac{\Phi}{2\pi}.$$

Dessa forma, encontramos um potencial de calibre adequado para descrever o solenóide:

$$\mathbf{A}(t, x) = \begin{cases} \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a, \\ \frac{B_0 a^2}{2} \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{(x^2 + y^2)}, 0 \right) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a, \end{cases}$$

$$\phi(t, x) = 0.$$

Exemplo 1.8 (Monopolo magnético) Considere uma partícula eletricamente carregada e estática na origem do $\mathbb{R}^3$. Pela lei de Coulomb, essa partícula carregada cria um campo eletromagnético em $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, constante no tempo, dado por

$$\mathbf{E}(t, x) = \frac{q}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x, y, z) = \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{B}(t, x) = 0,$$

onde q é a carga da partícula e (r, ϕ, θ) são as coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^3$ com vetores tangentes dados por (e_r, e_ϕ, e_θ) , respectivamente. Cálculos imediatos mostram que esse par satisfaz as equações de Maxwell. Além disso,

$$\begin{aligned}\phi(t, x) &= -\frac{q}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \mathbf{A}(t, x) &= 0,\end{aligned}$$

é um potencial de calibre, pois $\mathbf{B}(t, x) = 0 = \nabla \times 0 = \nabla \times \mathbf{A}$ e

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t, x) &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ &= -\nabla\left(-q(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right) - 0 \\ &= q\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}2x, \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}2y, \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}2z\right) \\ &= q\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}\right).\end{aligned}$$

O análogo magnético dessa situação nunca foi encontrado na natureza, porém Dirac, em seu célebre artigo [22], supôs tal existência e mostrou que essa levaria a importantes consequências. Considere uma partícula estática na origem de “carga magnética” g em $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Note que ela produz um campo eletromagnético dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t, x) &= 0 \\ \mathbf{B}(t, x) &= \frac{g}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x, y, z) = \frac{g}{r^2}e_r.\end{aligned}$$

Novamente, cálculos imediatos mostram que esse par satisfaz as equações de Maxwell. Queremos agora encontrar um potencial de calibre para descrever tal situação. Como $\mathbf{E} \equiv 0$, nos preocuparemos apenas com $\mathbf{A}$. Primeiramente observe que não existe um único potencial em todo $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. De fato, supondo tal existência, teríamos por um lado que o fluxo magnético através de uma esfera de raio R centrada na origem seria dada por

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{S^2} \mathbf{B} \cdot dS = \int_{S^2} \frac{g}{r^2} e_r \cdot n dA \\ &= \frac{g}{R^2} \int_{S^2} dA = \frac{g}{R^2} 4\pi R^2 \\ &= 4\pi g.\end{aligned}$$

Por outro, o Teorema de Stokes nos garantiria que

$$\Phi = \int_{S^2} \mathbf{B} \cdot dS = \int_{S^2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot dS = \oint_{\partial S^2 = \emptyset} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Apesar de não termos existência global, já sabemos da existência local do potencial de calibre. O que faremos agora é apresentar uma cobertura de Ω por dois abertos e um potencial definido em cada um deles. Considere o aberto $U_+ = \Omega \setminus Z_-$ tal que $Z_- = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 0\}$. Tal conjunto é um exemplo do que é conhecido em física como corda de Dirac, i.e., uma curva contínua que começa na origem, não possui autointerseção e se prolonga infinitamente em uma dada direção. Um cálculo imediato mostra que $\mathbf{A}_+ = \frac{g}{r \sin \phi} (1 - \cos \phi) \mathbf{e}_\theta$ é um potencial de calibre em U_+ . De fato, representando-se $\mathbf{A}$ em coordenadas esféricas na forma $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\phi \mathbf{e}_\phi + A_\theta \mathbf{e}_\theta$, segue que

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta \sin \phi) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_\phi \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} A_r - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right) \mathbf{e}_\phi \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} A_r \right) \mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}_+ &= \frac{1}{r \sin \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta \sin \phi) \right) \mathbf{e}_r \\ &= \frac{1}{r \sin \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{g(1 - \cos \phi)}{r} \right) \right) \mathbf{e}_r \\ &= -\frac{g}{r^2 \sin \phi} (-\sin \phi) \mathbf{e}_r \\ &= \frac{g}{r^2} \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Analogamente, $\mathbf{A}_- = \frac{-g}{r \sin \phi} (1 + \cos \phi) \mathbf{e}_\theta$ é um potencial de calibre em $U_- = \Omega \setminus Z_+$, onde $Z_+ = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$. Claramente $\mathbf{A}_+$ e $\mathbf{A}_-$ não coincidem na interseção de seus domínios. E não poderia ser diferente, caso contrário, teríamos um potencial global. Explicitamente, em $U_+ \cap U_-$ vale

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_- &= \left[\frac{g}{r \sin \phi} (1 - \cos \phi) - \frac{-g}{r \sin \phi} (1 + \cos \phi) \right] \mathbf{e}_\theta \\ &= \left[\frac{g}{r \sin \phi} (1 - \cos \phi + 1 + \cos \phi) \right] \mathbf{e}_\theta \\ &= \frac{2g}{r \sin \phi} \mathbf{e}_\theta \\ &= \nabla (2g\theta), \end{aligned}$$

onde o operador gradiente é calculado em coordenadas esféricas, i.e.,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta.$$

Isso nos diz que $\mathbf{A}_+$ e $\mathbf{A}_-$ diferem por uma transformação de calibre com $\chi = 2g\theta$; portanto, descrevem a mesma situação física.

1.2 A relatividade restrita segundo Poincaré

“Peut-être devons-nous construire toute une nouvelle mécanique que nous ne faisons qu’entrevoir, où l’inertie croissant avec la vitesse, la vitesse de la lumière deviendrait une limite infranchissable.”

– Henry Poincaré, 1904 ([78, p. 324]).

Seguiremos agora a abordagem dada por Poincaré na sua formulação da relatividade restrita, por ser esta mais conceitual, filosoficamente concisa e coerente, uma vez que se apoia unicamente em seu princípio da relatividade, sem maiores considerações sobre a velocidade da luz com relação a referenciais inerciais. Nessa abordagem, o fato da luz ser constante será uma consequência desse princípio fundamental enunciado por Poincaré e não um postulado, como fez Einstein.¹

1.2.1 Motivação

Tomando por base outros fenômenos naturais de caráter ondulatório, os físicos acreditaram durante muito tempo que as ondas eletromagnéticas se propagavam através de um meio material, então chamado de *éter*. Dessa forma, a existência de tal referencial privilegiado permitiria detectar pequenos movimentos da Terra com relação a esse tal meio material através de experimentos com a propagação da luz. No entanto, através de seu interferômetro, A.A. Michelson e E.W. Morley realizaram diversos experimentos entre os anos de 1881 e 1887 sem detectar o menor sinal da existência de tal meio. Tendo em vista o resultado da experiência com o interferômetro de Michelson, Lorentz e Fitzgerald ([80]) propõem uma explicação para o fenômeno da aberração luminosa que consiste na contração de corpos em movimento com relação a Terra segundo a transformação ([54])

$$\begin{cases} t' = t - (x - vt)\frac{v}{c^2} \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

¹Einstein, Albert. **On the Electrodynamics of Moving Bodies**. In: Lorentz, H.A.; Einstein, Albert; Minkowski, H; Weyl, H. *The Principle of Relativity*. (transl. by W. Perret and G. B. Jeffrey. Notes by A. Sommerfeld) Methuen and Company, Ltd., London (1923). pp. 37–38. They suggest rather that, as has already been shown to the first order of small quantities, the same laws of electrodynamics and optics will be valid for all frames of reference for which the equations of mechanics hold good. We will raise this conjecture (the purport of which will hereafter be called the “Principle of Relativity”) to the status of a postulate, and also introduce another postulate, which is only apparently irreconcilable with the former, namely, that light is always propagated in empty space with a definite velocity c which is independent of the state of motion of the emitting body. These two postulates suffice for the attainment of a simple and consistent theory of the electrodynamics of moving bodies based on Maxwell’s theory for stationary bodies. ([30])

Em consonância com essas ideias, com uma abordagem mais filosófica, Poincaré enuncia em 1904 seu *princípio da relatividade*, tendo sido o primeiro a se utilizar desta expressão.

“Le principe de la relativité, d’après lequel les lois des phénomènes physiques doivent être les mêmes, soit pour un observateur fixe, soit pour un observateur entraîné dans un mouvement de translation uniforme; de sorte que nous n’avons et ne pouvons avoir aucun moyen de discerner si nous sommes, oui ou non, emportés dans un pareil mouvement.” — Henri Poincaré, 1904 ([78, p. 306])

De acordo com o princípio da relatividade de Poincaré, *as equações que determinam as leis físicas devem permanecer invariantes quando determinadas em referenciais inerciais*, generalizando assim o princípio da relatividade de Galileu Galilei, que versava unicamente sobre as leis da mecânica.

Influenciado pelos princípios enunciados por Poincaré, Lorentz faz mais uma tentativa de chegar a uma transformação adequada, obtendo assim a expressão ([55, p. 813, fórmulas (7) e (8)])

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - c\beta x) \\ x' = \gamma(x - \frac{1}{c}\beta t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Dessa forma, o primeiro passo tomado por Poincaré foi verificar a invariância das leis de Maxwell mediante aquilo que ele batizou de *transformação de Lorentz*.

1.2.2 O princípio da relatividade e o campo eletromagnético

O princípio da relatividade nos assegura então que as leis de Maxwell independem de referencial. Vejamos como ficam essas equações neste novo referencial. Considerando-se a velocidade da luz igual a 1, a transformação de Lorentz assume a forma

$$\begin{cases} x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$$

Segue da regra da cadeia que a equação (1.2) se transforma em:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \mathbf{B} \\ &= \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \\ &= \left(\gamma \frac{\partial B_1}{\partial x'_1} - \beta \gamma \frac{\partial B_1}{\partial x'_0} \right) + \frac{\partial B_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x'_3} \end{aligned}$$

Isso equivale à equação

$$\frac{\partial}{\partial x'_0} (\gamma\beta B_1) - \frac{\partial}{\partial x'_1} (\gamma B_1) - \frac{\partial}{\partial x'_2} (B_2) - \frac{\partial}{\partial x'_3} (B_3) = 0 \quad (1.12)$$

Já a equação (1.3) se transforma em

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_0} + \nabla \times \mathbf{E} \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}, \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}, \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \left(\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x'_0} - \beta \gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x'_1} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x'_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x'_3}, \frac{\partial E_1}{\partial x'_3} - \left(\gamma \frac{\partial E_3}{\partial x'_1} - \beta \gamma \frac{\partial E_3}{\partial x'_0} \right), \left(\gamma \frac{\partial E_2}{\partial x'_1} - \beta \gamma \frac{\partial E_2}{\partial x'_0} \right) - \frac{\partial E_1}{\partial x'_2} \right) \end{aligned}$$

Isso equivale ao sistema de equações

$$\frac{\partial}{\partial x'_0} (\gamma B_1) - \frac{\partial}{\partial x'_1} (\gamma\beta B_1) + \frac{\partial}{\partial x'_2} (E_3) - \frac{\partial}{\partial x'_3} (E_2) = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_0} (\gamma B_2 + \beta \gamma E_3) + \left(\frac{\partial}{\partial x'_3} (E_1) - \frac{\partial}{\partial x'_1} (\gamma\beta B_2 + \gamma E_3) \right) = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_0} (\gamma B_3 - \beta \gamma E_2) + \left(\frac{\partial}{\partial x'_1} (\gamma E_2 - \gamma\beta B_3) - \frac{\partial}{\partial x'_2} (E_1) \right) = 0 \quad (1.15)$$

Sendo assim, multiplicando-se a equação (1.12) por $-\gamma$ e somando-a à equação (1.13) multiplicada por $\gamma\beta$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} (\gamma^2(1 - \beta^2)B_1) + \frac{\partial}{\partial x'_2} (\gamma B_2 + \gamma\beta E_3) + \frac{\partial}{\partial x'_3} (\gamma B_3 - \gamma\beta E_2) = 0. \quad (1.16)$$

De maneira análoga, multiplicando a equação (1.13) por γ e subtraindo-a da equação (1.12) multiplicada por $\gamma\beta$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x'_0} (\gamma^2(1 - \beta^2)B_1) + \frac{\partial}{\partial x'_2} (\gamma E_3 + \gamma\beta B_2) + \frac{\partial}{\partial x'_3} (\gamma\beta B_3 - \gamma E_2) = 0. \quad (1.17)$$

Concluimos então que as equações (1.16, 1.17, 1.14 e 1.15) podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}' &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} + \nabla \times \mathbf{E}' &= 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= (B'_1, B'_2, B'_3) := (B_1, \gamma B_2 + \gamma\beta E_3, \gamma B_3 - \gamma\beta E_2) \\ \mathbf{E}' &= (E'_1, E'_2, E'_3) := (E_1, \gamma E_2 - \gamma\beta B_3, \gamma E_3 + \gamma\beta B_2) \end{aligned}$$

Por outro lado, a equação (1.4) se transforma em:

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\epsilon_0} &= \nabla \cdot \mathbf{E} \\ &= \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \\ &= \left(\gamma \frac{\partial E_1}{\partial x'_1} - \beta \gamma \frac{\partial E_1}{\partial x'_0} \right) + \frac{\partial E_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x'_3}\end{aligned}$$

Isso equivale à equação

$$\frac{\partial}{\partial x'_0} (\gamma \beta E_1) - \frac{\partial}{\partial x'_1} (\gamma E_1) - \frac{\partial}{\partial x'_2} (E_2) - \frac{\partial}{\partial x'_3} (E_3) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.18)$$

Já a equação (1.5) se transforma em

$$\begin{aligned}-\frac{j}{\epsilon_0} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_0} - \nabla \times \mathbf{B} \\ &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3}, \frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1}, \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \left(\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x'_0} - \beta \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x'_1} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial B_3}{\partial x'_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x'_3}, \frac{\partial B_1}{\partial x'_3} - \left(\gamma \frac{\partial B_3}{\partial x'_1} - \beta \gamma \frac{\partial B_3}{\partial x'_0} \right), \left(\gamma \frac{\partial B_2}{\partial x'_1} - \beta \gamma \frac{\partial B_2}{\partial x'_0} \right) - \frac{\partial B_1}{\partial x'_2} \right)\end{aligned}$$

Isso equivale ao sistema de equações

$$\frac{\partial}{\partial x'_0} (\gamma E_1) - \frac{\partial}{\partial x'_1} (\gamma \beta E_1) - \frac{\partial}{\partial x'_2} (B_3) + \frac{\partial}{\partial x'_3} (B_2) = -\frac{j_1}{\epsilon_0} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_0} (\gamma E_2 - \beta \gamma B_3) - \left(\frac{\partial}{\partial x'_3} (B_1) - \frac{\partial}{\partial x'_1} (\gamma B_3 - \beta \gamma E_2) \right) = -\frac{j_2}{\epsilon_0} \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_0} (\gamma E_3 + \beta \gamma B_2) - \left(\frac{\partial}{\partial x'_1} (\gamma B_2 + \beta \gamma E_3) - \frac{\partial}{\partial x'_2} (B_1) \right) = -\frac{j_3}{\epsilon_0} \quad (1.21)$$

Dessa forma, multiplicando-se a equação (1.18) por $-\gamma$ e somando-se à equação (1.19) multiplicada por $\gamma \beta$ teremos

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} (\gamma^2 (1 - \beta^2) E_1) + \frac{\partial}{\partial x'_2} (\gamma E_2 - \gamma \beta B_3) + \frac{\partial}{\partial x'_3} (\gamma E_3 + \gamma \beta B_2) = \frac{\gamma(\rho - \beta j_1)}{\epsilon_0}. \quad (1.22)$$

De maneira análoga, multiplicando-se a equação (1.19) por γ e dela subtraindo a equação (1.18) multiplicada por $\gamma \beta$, teremos

$$\frac{\partial}{\partial x'_0} (\gamma^2 (1 - \beta^2) E_1) - \left(\frac{\partial}{\partial x'_2} (\gamma B_3 - \gamma \beta E_2) - \frac{\partial}{\partial x'_3} (\gamma B_2 + \gamma \beta E_3) \right) = -\frac{\gamma(j_1 - \beta \rho)}{\epsilon_0}. \quad (1.23)$$

Sendo assim, as equações (1.22, 1.23, 1.20 e 1.21) podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}' &= \frac{\rho'}{\epsilon_0}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} - \nabla \times \mathbf{B}' &= -\frac{\mathbf{j}'}{\epsilon_0},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\rho' &= \gamma(\rho - \beta j_1) \\ j_1' &= \gamma(j_1 - \beta \rho) \\ j_2' &= j_2 \\ j_3' &= j_3.\end{aligned}\tag{1.24}$$

A conclusão a que chegamos é que o campo magnético e elétrico fazem parte de uma mesma entidade, se misturando de acordo com as regras acima, a depender do referencial inercial em que se observa o evento. O mesmo ocorrendo com relação à carga e à corrente elétrica.

1.2.3 O grupo de Lorentz e o espaço de Poincaré-Minkowski

“On voit que, dans cette transformation, l’axe de x joue un rôle particulier, mais on peut évidemment construire une transformation où ce rôle serait joué par une droite quelconque passant par l’origine. L’ensemble de toutes ces transformations, joint à l’ensemble de toutes les rotations de l’espace, doit former un groupe; mais, pour qu’il en soit ainsi, il faut que $\ell = 1$, et c’est là une conséquence que Lorentz avait obtenu par une autre voie.” – Henry Poincaré 1906 ([80]).

Com isso, Poincaré se antecipa a Hermann Weyl (cf. [90, 91]) e percebe que as equações do eletromagnetismo são conformemente invariantes, i.e., são invariantes também por dilatações e contrações. No entanto, ele usa um argumento de simetria para mostrar que, do ponto de vista físico, as únicas transformações de Lorentz que nos interessam são justamente aquelas em que $\ell = 1$, se antecipando aqui também às críticas que Einstein faria a respeito do modelo conforme de Weyl ([85, §5]). De fato, se um referencial R_2 se afasta do referencial R_1 com velocidade constante v ao longo do eixo x , então o mesmo se dá quando se observa o referencial R_1 a partir do R_2 , apenas com velocidade $-v$. Dessa forma, as leis naturais observadas no segundo referencial a partir do primeiro, são inteiramente simétricas às observadas em R_1 a partir de R_2 . Como estas leis se correlacionam através de uma transformação de Lorentz e de sua inversa, esta simetria só será preservada se $\ell = 1$. Note que essa simetria é uma consequência imediata do *princípio da relatividade* enunciado por Poincaré em 1904.

“Nous pouvons encore engendrer notre groupe d’une autre manière. Toute transformation du groupe pourra être regardée comme une transformation de la forme:

$$x' = \ell\gamma(x - \beta t); \quad y' = \ell y; \quad z' = \ell z; \quad t' = \ell\gamma(t - \beta x)\tag{139}$$