

onde

$$\begin{aligned}\rho' &= \gamma(\rho - \beta j_1) \\ j_1' &= \gamma(j_1 - \beta \rho) \\ j_2' &= j_2 \\ j_3' &= j_3.\end{aligned}\tag{1.24}$$

A conclusão a que chegamos é que o campo magnético e elétrico fazem parte de uma mesma entidade, se misturando de acordo com as regras acima, a depender do referencial inercial em que se observa o evento. O mesmo ocorrendo com relação à carga e à corrente elétrica.

1.2.3 O grupo de Lorentz e o espaço de Poincaré-Minkowski

“On voit que, dans cette transformation, l’axe de x joue un rôle particulier, mais on peut évidemment construire une transformation où ce rôle serait joué par une droite quelconque passant par l’origine. L’ensemble de toutes ces transformations, joint à l’ensemble de toutes les rotations de l’espace, doit former un groupe; mais, pour qu’il en soit ainsi, il faut que $\ell = 1$, et c’est là une conséquence que Lorentz avait obtenu par une autre voie.” – Henry Poincaré 1906 ([80]).

Com isso, Poincaré se antecipa a Hermann Weyl (cf. [90, 91]) e percebe que as equações do eletromagnetismo são conformemente invariantes, i.e., são invariantes também por dilatações e contrações. No entanto, ele usa um argumento de simetria para mostrar que, do ponto de vista físico, as únicas transformações de Lorentz que nos interessam são justamente aquelas em que $\ell = 1$, se antecipando aqui também às críticas que Einstein faria a respeito do modelo conforme de Weyl ([85, §5]). De fato, se um referencial R_2 se afasta do referencial R_1 com velocidade constante v ao longo do eixo x , então o mesmo se dá quando se observa o referencial R_1 a partir do R_2 , apenas com velocidade $-v$. Dessa forma, as leis naturais observadas no segundo referencial a partir do primeiro, são inteiramente simétricas às observadas em R_1 a partir de R_2 . Como estas leis se correlacionam através de uma transformação de Lorentz e de sua inversa, esta simetria só será preservada se $\ell = 1$. Note que essa simetria é uma consequência imediata do *princípio da relatividade* enunciado por Poincaré em 1904.

“Nous pouvons encore engendrer notre groupe d’une autre manière. Toute transformation du groupe pourra être regardée comme une transformation de la forme:

$$x' = \ell\gamma(x - \beta t); \quad y' = \ell y; \quad z' = \ell z; \quad t' = \ell\gamma(t - \beta x)\tag{139}$$

precedé et suivie d'une rotation convenable.

Mais pour notre objet, nous ne devons considérer qu'une partie des transformations de ce groupe; nous devons supposer que ℓ est une fonction de β ; is s'agit de choisir cette fonction de façon que cette partie du groupe, que j'appellerai P , forme encore un groupe.

Faisons tourner le système de 180° autour de l'axe des y , nous devons trouver une transformation qui devra encore appartenir à P . Or cela revient à changer le signe de x, x', z et z' ; on trouve donc ainsi (pour les relations (139)):

$$x' = \ell\gamma(x + \beta t); \quad y' = \ell y; \quad z' = \ell z; \quad t' = \ell\gamma(t + \beta x) \quad (140)$$

Donc ℓ ne change pas quand on change β en $-\beta$.

D'autre part, si P est un groupe, la substitution inverse de (139), qui s'écrit:

$$x' = \frac{\gamma}{\ell}(x + \beta t); \quad y' = \frac{y}{\ell}; \quad z' = \frac{z}{\ell}; \quad t' = \frac{\gamma}{\ell}(t + \beta x) \quad (141)$$

devra également appartenir à P ; elle devra donc être identique à (140), c'est à dire que:

$$\ell = \frac{1}{\ell}$$

On devra donc avoir $\ell = 1$.” – Henry Poincaré, 1906 ([80, §4]).

Como acabamos de ver, as leis do eletromagnetismo não se alteram quando realizamos uma mudança de coordenadas determinada por uma transformação de Lorentz. Acontece que estas mesmas leis também não se alteram por intermédio de rotações no espaço tridimensional. Portanto, é natural que o espaço destas transformações determine um grupo.

“Le concept de groupe mathématique est à la base de la théorie de la relativité restreinte” – Wolfgang Pauli ([73], [53, p. 26]).

Vamos chamar o grupo gerado pela composição entre rotação de $\mathbb{R}^3$ (i.e., elementos de grupo ortogonal $O(3)$) e transformações de Lorentz da forma (2.4) de grupo de Lorentz e denotá-lo, momentaneamente, por $G_{\mathcal{L}}$.

A primeira observação que Poincaré faz a respeito deste grupo é que ele preserva o 2-tensor simétrico $J_{\mathcal{L}}: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J_{\mathcal{L}} = dx_0 \otimes dx_0 - dx_1 \otimes dx_1 - dx_2 \otimes dx_2 - dx_3 \otimes dx_3,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^4$. Isso nos permite definir a forma quadrática $J_{\mathcal{L}}^2: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $J_{\mathcal{L}}^2(x) = J_{\mathcal{L}}(x, x)$.

Definição 1.9 O espaço vetorial real quadrimensional $(\mathbb{R}^4, J)$ munido da (pseudo) métrica de Lorentz induzida pela forma quadrática

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}} = J_{\mathcal{L}}^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

será chamado de espaço de **Poincaré-Minkowski** e será denotado por $\mathbb{R}^{1,3}$.

Definição 1.10 Diremos que um operador linear $T: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$ é uma **isometria** se preservar a métrica de Lorentz. O espaço das isometrias inversíveis de $\mathbb{R}^{1,3}$ forma um grupo que será denotado por $O(1,3)$.

Proposição 1.11 Se $T \in G_{\mathcal{L}}$, então

$$J_{\mathcal{L}}(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) = J_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$. Em outras palavras, $G_{\mathcal{L}} \subset O(1,3)$. Em particular,

$$J_{\mathcal{L}}^2(T(\mathbf{x})) = J_{\mathcal{L}}^2(\mathbf{x}).$$

Demonstração. Sem dificuldade é possível mostrar que uma rotação espacial preserva $J_{\mathcal{L}}$, uma vez que preserva a métrica euclideana da cópia de $\mathbb{R}^3$ dada por $\{t\} \times \mathbb{R}^3$. Por outro lado, como T é uma transformação linear e $J_{\mathcal{L}}$ uma forma bilinear, então suas matrizes na base canônica assumem, respectivamente, as seguintes formas:

$$[J_{\mathcal{L}}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, basta-nos mostrar que $[T]^t[J_{\mathcal{L}}][T] = [J_{\mathcal{L}}]$. De fato,

$$[J_{\mathcal{L}}][T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & \gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} [T]^t[J_{\mathcal{L}}][T] &= \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma & \gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \beta^2\gamma^2 - \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = [J_{\mathcal{L}}], \end{aligned}$$

uma vez que $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. ■

A recíproca do resultado anterior é bem mais envolvente e sua verificação tem uma dificuldade técnica intrínseca que foge ao escopo deste texto. Para uma demonstração, ver ([38, Theorem 2.6.]).

Teorema 1.12 *Seja $T \in O(1, 3)$ e $[T]$ sua matriz na base canônica, então $[T]$ se decompõe na forma*

$$[T] = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

onde $\epsilon = \pm 1$, $P \in O(3)$, $Q \in SO(3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Note que ao tomarmos $\alpha := \ln \gamma(1 - \beta)$, obtemos a relação

$$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{bmatrix},$$

de onde segue a recíproca da Proposição 1.11, i.e.,

$$G_{\mathcal{L}} = O(1, 3).$$

Doravante, iremos nos referir a ambos como o *grupo de Lorentz*.

Observação 1.13 *Se adicionarmos aos geradores do grupo de Lorentz as translações espaciais e temporais, então teremos um novo grupo, que será chamado de grupo de Poincaré e denotado por $G_{\mathcal{P}}$. Naturalmente, todo elemento do grupo de Poincaré pode ser decomposto como a composição de uma translação espacial, uma temporal e um elemento do grupo de Lorentz. A importância desse grupo surge quando interpretamos a equivalência entre referências em termos de sistema de coordenadas. Os cociclos de transição da variedade definida pelas cartas coordenadas será um elemento do $G_{\mathcal{P}}$. Note que o grupo de Poincaré também deixa invariante as equações de Maxwell.*

A invariância da métrica por transformações de Lorentz sugere a mesma invariância por parte de sua diferencial.

Definição 1.14 *Diremos que dois quadrivetores $\mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{1,3}$ e $\mathbf{v}' = (v'_0, v'_1, v'_2, v'_3) \in \mathbb{R}^{1,3}$ são covariantes se*

$$\mathbf{v}' = T(\mathbf{v})$$

para todo $T \in O(1, 3)$.

Proposição 1.15 *Seja T uma transformação de Lorentz, então*

$$dJ_{\mathcal{L}}^2(T(\mathbf{x})) \cdot T(\mathbf{v}) = dJ_{\mathcal{L}}^2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1,3}$ e todo quadrivetor $\mathbf{v}$.

Demonstração. Segue da bilinearidade da métrica de Lorentz que

$$dJ_{\mathcal{L}}^2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} = 2J_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$$

para todo quadrivetor $\mathbf{w}$. Logo,

$$\begin{aligned} dJ_{\mathcal{L}}^2(T(\mathbf{x})) \cdot T(\mathbf{v}) &= 2J_{\mathcal{L}}(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{v})) \\ &= 2J_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, (\mathbf{v})) \\ &= dJ_{\mathcal{L}}^2(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}). \end{aligned}$$

■

1.2.4 Quadrivetores e os invariantes do eletromagnetismo relativístico

Uma vez que já não dispomos de um espaço absoluto com único sistema de coordenadas, precisamos identificar as grandezas físicas que possam substituir aquelas no modelo newtoniano do eletromagnetismo devido a Faraday e Maxwell.

Com relação aos invariantes, note que o primeiro deles é a própria métrica de Lorentz (cf. Proposição 1.11), que associa uma única noção de comprimento a pontos em $\mathbb{R}^{1,3}$ a partir das entradas do vetor, independentemente do referencial escolhido. Na esteira da métrica de Lorentz, Poincaré identifica uma série de invariantes pela ação do grupo de Lorentz relacionados a grandezas físicas. Chegaremos aqui aos mesmos resultados por meio de métodos talvez menos intuitivos, nos utilizando do poderoso ferramental matemático desenvolvido durante o século que nos separa.

O espaço-tempo relativístico. Naturalmente, os primeiros quadrivetores invariantes são aqueles determinados pela própria noção de espaço-tempo, i.e., $\mathbf{x}' = T(\mathbf{x})$. Além disso, segue da Proposição 1.11 que a expressão

$$\mathbf{x}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} J_{\mathcal{L}}^2(\mathbf{x}^2) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \quad (1.25)$$

é um invariante que não depende do referencial escolhido.

Carga e corrente relativísticos. Recorde que o princípio da relatividade nos assegura a preservação das equações de Maxwell-Heaviside em vista das transformações de Lorentz. Como consequência imediata, temos a relação (1.24). Em outras palavras, os quadrivetores (ρ', J') e (ρ', J') são *covariantes*, i.e.

$$(\rho', \mathbf{j}') = T(\rho, \mathbf{j}),$$

onde $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = \rho \mathbf{v}$ é o vetor de corrente elétrica induzida pela densidade de corrente ρ . Em particular, segue da primeira entrada desta equação que

$$\rho' = \gamma\rho(1 - \beta v_x). \quad (1.26)$$

Em resumo, assim como o campo elétrico se mixa com o campo magnético, a carga e a corrente e fundem num só objeto chamado de *quadrivetor carga-corrente*. Em particular, segue imediatamente da Proposição 1.11 que

$$\rho^2 - \mathbf{j}^2 = \rho'^2 - j_1'^2 - j_2'^2 - j_3'^2 \quad (1.27)$$

é um invariante que não depende do sistema de coordenadas.

Finalmente, note que a relação acima nos diz que

$$\rho'(1, \mathbf{v}') = (\rho', J') = T(\rho, J) = \rho T(1, \mathbf{v}).$$

Em outras palavras,

$$\gamma(1 - \beta v_x)(1, \mathbf{v}') = T(1, \mathbf{v})$$

Vamos investigar melhor essa relação e obter novos quadrivetores covariantes a partir da velocidade.

Velocidade e tempo relativísticos. Começemos observando que as velocidades do móveis em referenciais inerciais correspondem a $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ e satisfazem as relações

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v_x - \beta}{1 - \beta v_x} \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta v_x)} \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \beta v_x)} \end{aligned} \quad (1.28)$$

É natural imaginarmos que a expressão da relação entre essas velocidades esteja interligada à transformação de Lorentz de alguma forma. De fato, temos

$$\begin{aligned} T(1, \mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(1 - \beta v_x) \\ \gamma(v_x - \beta) \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \gamma(1 - \beta v_x) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{v_x - \beta}{1 - \beta v_x} \\ \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta v_x)} \\ \frac{v_z}{\gamma(1 - \beta v_x)} \end{bmatrix} \\ &= \gamma(1 - \beta v_x)(1, \mathbf{v}') \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\gamma(1 - \beta v_x) \|(1, \mathbf{v}')\|_{\mathcal{L}} = \|T(1, \mathbf{v})\|_{\mathcal{L}} = \|(1, \mathbf{v})\|_{\mathcal{L}}.$$

uma vez que $\gamma(1 - \beta v_x) > 0$. Logo

$$T\left(\frac{(1, \mathbf{v})}{\|(1, \mathbf{v})\|_{\mathcal{L}}}\right) = \frac{1}{\gamma(1 - \beta v_x) \|(1, \mathbf{v}')\|_{\mathcal{L}}} T((1, \mathbf{v})) = \frac{(1, \mathbf{v}')}{\|(1, \mathbf{v}')\|_{\mathcal{L}}}.$$

Isso mostra que da mesma forma que $\mathbf{x} = (t, r)$ corresponde a $\mathbf{x}' = (t', r')$, temos $\mathbf{U} = \frac{(1, \mathbf{v})}{\|(1, \mathbf{v})\|_{\mathcal{L}}}$ correspondendo a $\mathbf{U}' = \frac{(1, \mathbf{v}')}{\|(1, \mathbf{v}')\|_{\mathcal{L}}}$, i.e.,

$$T(\mathbf{U}) = \mathbf{U}'. \quad (1.29)$$

Em outras palavras, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{U}'$ são covariantes. Por outro lado, segue imediatamente da Proposição 1.15 que

$$dJ_{\mathcal{L}}^2(T(\mathbf{x})) \cdot T(\mathbf{U}) = dJ_{\mathcal{L}}^2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1,3}$ e $\mathbf{U} = \frac{(1, \mathbf{v})}{\|(1, \mathbf{v})\|_{\mathcal{L}}}$. Em outras palavras, a expressão

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} = \frac{x_0 - x_1 v_1 - x_2 v_2 - x_3 v_3}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}, \quad (1.30)$$

não depende de referencial. Finalmente, se $\mathbf{U}, \mathbf{U}_1$ e $\mathbf{U}', \mathbf{U}'_1$ são covariantes, i.e., se $\mathbf{U}' = T(\mathbf{U})$ e $\mathbf{U}'_1 = T(\mathbf{U}_1)$, então segue da Proposição 1.11 que

$$J_{\mathcal{L}}(\mathbf{U}', \mathbf{U}'_1) = J_{\mathcal{L}}(T(\mathbf{U}), T(\mathbf{U}_1)) = J_{\mathcal{L}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_1).$$

Em outras palavras, a expressão

$$\frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \sqrt{1 - \mathbf{v}_1^2}} \quad (1.31)$$

não depende do referencial.

Em resumo, Poincaré nos chama a atenção para o fato de que as equações (1.25), (1.27), (1.30), (1.31) e as expressões que delas derivam determinam funções que são invariantes com respeito às transformações de Lorentz. Portanto, representam grandezas físicas que independem do referencial (cf. [80, §9]).

Observação 1.16 *Segue imediatamente das equações (1.28) que a velocidade da luz é constante em qualquer referencial inercial. Primeiramente, recorde que, por uma questão de simetria, convencionamos a velocidade da luz como $c = 1$ numa certa unidade de medida de velocidade (isto pode ser feito modificando-se a unidade de comprimento, ou de tempo, ou ambas). Dessa forma, se num referencial S temos $v_x = c = 1$, $v_y = v_z = 0$, então*

$$\begin{aligned} v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta v_x)} = 0, \\ v'_z &= \frac{v_z}{\gamma(1 - \beta v_x)} = 0, \end{aligned}$$

enquanto que

$$v'_x = \frac{v_x - \beta}{1 - \beta v_x} = \frac{c - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}c} = \frac{1 - \frac{v}{1}}{1 - \frac{v}{1}1} = 1 = c.$$

onde $\beta = \frac{v}{c}$ e v é a velocidade de deslocamento entre os referenciais S e S' .

Tempo próprio e quadravelocidade. Passaremos agora a um conceito introduzido por H. Minkowski em 1908 ([60]). Em relatividade, o tempo próprio de uma trajetória $\gamma \subset \mathbb{R}^{1,3}$ é aquele medido por um relógio disposto ao longo da trajetória. Em termos do espaço-tempo quadrimensional, o tempo próprio é análogo ao conceito de comprimento de arco de uma trajetória tridimensional. Portanto, tal grandeza independe de referencial. Por convenção, esse tempo é designado pela letra grega τ , a fim de distingui-la de coordenada t de um referencial inercial qualquer. Em contrapartida, o tempo t entre dois eventos é aquele medido por um observador usando seu próprio método de assinalar o tempo a um dado evento. No caso particular de um observador inercial (relatividade restrita), o tempo é medido segundo as coordenadas deste observador e usando seu próprio relógio e sua própria noção de simultaneidade.

Definição 1.17 *A trajetória de um corpo é descrita por uma curva parametrizada $x: I \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$, tal que a composição da parametrização com a aplicação $t: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}$, que é a projeção no eixo t , é um difeomorfismo. Tal curva é chamada linha de universo. O valor $t \circ x: I \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado de tempo do referencial, e o valor:*

$$\tau = \frac{1}{c} \int_I \sqrt{g_{ij}(x(s)) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}} ds = \frac{1}{c} \int_I \sqrt{\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2} ds$$

é chamado tempo próprio do corpo.

Façamos agora uma pequena pausa para compreendermos melhor como esse comprimento está relacionado com o tempo dado por um relógio posicionado ao longo de uma trajetória no espaço-tempo relativístico. Considere uma trajetória $\gamma \subset \mathbb{R}^{1,3}$ dada por um segmento de reta (segundo Minkowski, tal trajetória se refere a um objeto em movimento inercial, i.e., que se desloca com velocidade constante do referencial de um observador fixado). Vamos agora mostrar que é possível escolher um referencial inercial $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ao longo da trajetória γ de tal forma que $\mathbf{e}_0$ seja tangente à γ . De fato, após tomarmos um referencial inercial qualquer sobre a trajetória retilínea, basta-nos realizar uma rotação, a fim de reposicionarmos $\mathbf{e}_0$ tangente a esta trajetória. Como as rotações assim escolhidas são elementos do grupo de Lorentz, nosso referencial será na verdade um referencial inercial. Uma vez que o tempo de tal relógio é aquele medido em um referencial cuja direção $\mathbf{e}_0$ (i.e., da coordenada do tempo) está sempre tangente a esta trajetória $\gamma \subset \mathbb{R}^{1,3}$, então a projeção nas coordenadas $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3$, será nula, o que mostra que nesse sistema de coordenadas não há movimento do corpo ao longo da trajetória, mas unicamente o transcorrer do tempo. Por isso, a conclusão de que o tempo nesse referencial coincide com o tempo próprio (comprimento da trajetória γ) e mede o tempo do relógio disposto neste referencial.

Note ainda que o conceito de tempo próprio pode ser estendido a uma trajetória acelerada (i.e., que não seja dada por uma linha reta em $\mathbb{R}^{1,3}$) com a mesma definição

e as mesmas interpretações, com a única diferença de que não podemos mais falar em referenciais inerciais.

Retornando à definição acima, vemos que

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{c} \int_I \sqrt{\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2} ds \\ &= \frac{1}{c} \int_I \sqrt{c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds,\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_x}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_y}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2} = \left\| \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \right\|_{\mathcal{L}}.$$

Aplicando-se a regra da cadeia, vemos que

$$\frac{dx_0}{d\tau} = c \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^{-1} = \frac{c}{\left\| \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \right\|_{\mathcal{L}}}, \quad (1.32)$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{v_i}{\left\| \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \right\|_{\mathcal{L}}}. \quad (1.33)$$

para $i = 1, 2, 3$. Em resumo, intrinsecamente associado à noção de tempo próprio está o conceito de *quadrivelocidade*.

Definição 1.18 *A velocidade relativística, também chamada de quadrivelocidade, é obtida a partir da taxa de variação da linha do tempo com relação ao tempo próprio, i.e.,*

$$U_i = \frac{dx_i}{d\tau} \Rightarrow \mathbf{U} = c \left(\frac{1}{\left\| \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \right\|_{\mathcal{L}}}, \frac{1}{\left\| \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \right\|_{\mathcal{L}}} \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \in \mathbb{R}^{1,3}.$$

Note que a quadrivelocidade é invariante por transformações de Lorentz. De fato, como

$$\mathbf{U} = c \left(\frac{\left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{\left\| \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \right\|_{\mathcal{L}}} \right),$$

então segue de (1.29) que

$$\mathbf{U}' = T(\mathbf{U}).$$

Observação 1.19 *A quadrivelocidade tem norma constante igual a c na métrica de Lorentz.*

Força e trabalho relativísticos. Vejamos agora como se comporta a força de Lorentz em vista de uma mudança de coordenadas estabelecida por uma transformação de Lorentz.

Nossa expectativa é a de que as três componentes da força apareçam como as coordenadas espaciais de uma quadrivetor. Antes de mais nada, vamos calcular as funções coordenadas da força de Lorentz nos dois sistemas de coordenadas distintos. Começemos pelas coordenadas de $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Iremos iniciar pelo cálculo do seguinte produto vetorial:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= (v_2 B_3 - v_3 B_2)\mathbf{e}_1 - (v_1 B_3 - v_3 B_1)\mathbf{e}_2 + (v_1 B_2 - v_2 B_1)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} f_1 &= \rho(E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2) \\ f_2 &= \rho(E_2 - v_1 B_3 + v_3 B_1) \\ f_3 &= \rho(E_3 + v_1 B_2 - v_2 B_1) \end{aligned} \tag{1.34}$$

Passemos agora ao cálculo de $\mathbf{f}' = \rho'(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}')$. Começemos calculando o seguinte produto vetorial:

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{v}' \times \mathbf{B}') &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{v_1 - \beta}{1 - \beta v_1} & \frac{v_2}{\gamma(1 - \beta v_1)} & \frac{v_3}{\gamma(1 - \beta v_1)} \\ B_1 & \gamma B_2 + \gamma \beta E_3 & \gamma B_3 - \gamma \beta E_2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\rho'}{\gamma(1 - \beta v_1)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \gamma(v_1 - \beta) & v_2 & v_3 \\ B_1 & \gamma B_2 + \gamma \beta E_3 & \gamma B_3 - \gamma \beta E_2 \end{vmatrix} \\ &= \rho'[(\gamma v_2 B_3 - \gamma \beta v_2 E_2 - \gamma v_3 B_2 - \gamma \beta v_3 E_3)\mathbf{e}_1 \\ &\quad - (\gamma(v_1 - \beta)(\gamma B_3 - \gamma \beta E_2) - v_3 B_1)\mathbf{e}_2 \\ &\quad + (\gamma(v_1 - \beta)(\gamma B_2 + \gamma \beta E_3) - v_2 B_1)\mathbf{e}_3] \\ &= \rho\gamma[(v_2 B_3 - \beta v_2 E_2 - v_3 B_2 - \beta v_3 E_3)\mathbf{e}_1 \\ &\quad - ((v_1 - \beta)(\gamma B_3 - \gamma \beta E_2) - \gamma^{-1} v_3 B_1)\mathbf{e}_2 \\ &\quad + ((v_1 - \beta)(\gamma B_2 + \gamma \beta E_3) - \gamma^{-1} v_2 B_1)\mathbf{e}_3]. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\rho' \mathbf{E}' = \rho\gamma(1 - \beta v_1)[E_1 \mathbf{e}_1 + (\gamma E_2 - \gamma \beta B_3)\mathbf{e}_2 + (\gamma E_3 + \gamma \beta B_2)\mathbf{e}_3].$$

Temos então

$$\begin{aligned} f'_1 &= \rho\gamma[E_1 - \beta v_1 E_1 + v_2 B_3 - \beta v_2 E_2 - v_3 B_2 - \beta v_3 E_3] \\ &= \gamma f_1 - \gamma \beta \rho[v_1 E_1 + v_2 E_2 + v_3 E_3] \\ &= \gamma f_1 - \gamma \beta f_0, \end{aligned}$$

onde f_0 é o trabalho realizado por $\mathbf{f}$ na direção $\mathbf{v}$, i.e.,

$$f_0 = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \rho[v_1 E_1 + v_2 E_2 + v_3 E_3].$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f'_2 &= \rho\gamma[(1 - \beta v_1)(\gamma E_2 - \gamma\beta B_3) - (v_1 - \beta)(\gamma B_3 - \gamma\beta E_2) + \gamma^{-1}v_3 B_1] \\ &= \rho\gamma[\gamma E_2 - \gamma\beta B_3 - \gamma\beta v_1 E_2 + \gamma\beta^2 v_1 B_3 - (\gamma v_1 B_3 - \gamma\beta v_1 E_2 - \gamma\beta B_3 + \gamma\beta^2 E_2) + \gamma^{-1}v_3 B_1] \\ &= \rho\gamma[\gamma E_2 - \gamma\beta^2 E_2 + \gamma\beta^2 v_1 B_3 - \gamma v_1 B_3 + \gamma^{-1}v_3 B_1] \\ &= \rho[\gamma^2(1 - \beta^2)E_2 - \gamma^2(1 - \beta^2)v_1 B_3 + v_3 B_1] \\ &= \rho[E_2 - v_1 B_3 + v_3 B_1] \\ &= f_2 \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} f'_3 &= \rho\gamma[(1 - \beta v_1)(\gamma E_3 + \gamma\beta B_2) + (v_1 - \beta)(\gamma B_2 + \gamma\beta E_3) - \gamma^{-1}v_2 B_1] \\ &= \rho\gamma[\gamma E_3 + \gamma\beta B_2 - \gamma\beta v_1 E_3 - \gamma\beta^2 v_1 B_2 + (\gamma v_1 B_2 + \gamma\beta v_1 E_3 - \gamma\beta B_2 - \gamma\beta^2 E_3) + \gamma^{-1}v_2 B_1] \\ &= \rho\gamma[\gamma E_3 - \gamma\beta^2 E_3 - \gamma\beta^2 v_1 B_2 + \gamma v_1 B_2 - \gamma^{-1}v_2 B_1] \\ &= \rho[\gamma^2(1 - \beta^2)E_3 + \gamma^2(1 - \beta^2)v_1 B_2 - v_2 B_1] \\ &= \rho[E_3 + v_1 B_2 - v_2 B_1] \\ &= f_3 \end{aligned}$$

Em resumo, temos

$$f'_1 = \gamma f_1 - \gamma\beta f_0$$

$$f'_2 = f'_2$$

$$f'_3 = f'_3$$

Uma vez que f_0 aparece na expressão acima, vamos então calcular a expressão de f'_0 , na esperança de ver surgir daí o nosso quadrivetor covariante. De fato, temos

$$\begin{aligned} f'_0 &= \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v}' \\ &= \rho' \mathbf{E}' \cdot \mathbf{v}' \\ &= \rho\gamma(1 - \beta v_1)\left[\left(\frac{v_1 - \beta}{1 - \beta v_1}\right) E_1 + \left(\frac{v_2}{\gamma(1 - \beta v_1)}\right) (\gamma E_2 - \gamma\beta B_3) + \left(\frac{v_3}{\gamma(1 - \beta v_1)}\right) (\gamma E_3 + \gamma\beta B_2)\right] \\ &= \rho[\gamma(v_1 - \beta)E_1 + v_2(\gamma E_2 - \gamma\beta B_3) + v_3(\gamma E_3 + \gamma\beta B_2)] \\ &= \rho\gamma[f_0 - \beta(E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2)] \\ &= \rho[\gamma f_0 - \gamma\beta f_1] \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma f_0 - \beta\gamma f_1 \\ \gamma f_1 - \beta\gamma f_0 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_0 \\ f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{bmatrix}.$$

Acabamos de verificar então o seguinte resultado:

Proposição 1.20 *Sejam $f_0 = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ e $f'_0 = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v}'$ os trabalhos de $\mathbf{f}$ e $\mathbf{f}'$ nas direções $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$, respectivamente, então os quadriveores $(f_0, \mathbf{f})$ e $(f'_0, \mathbf{f}')$ são covariantes. Mais precisamente, temos*

$$(f'_0, \mathbf{f}') = T(f_0, \mathbf{f}).$$

Como consequência imediata do resultado anterior e das Proposições 1.11 e 1.15, concluímos que as seguintes expressões não dependem do referencial

$$f_0^2 - \mathbf{f}^2, \quad f_0 t - \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}, \quad \frac{f_0 - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}},$$

onde $\mathbf{f}^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$ e $\mathbf{x} = (t, \mathbf{r})$.

O quadrivetor $F_{\mathcal{L}} = (f_0, \mathbf{f}) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{f})$ é também chamado de **hiperforça** de Lorentz.

1.3 A gravitação relativística

“Lorentz a donc été obligé de compléter son hypothèse en supposant que les forces de toute origine, et en particulier la gravitation, sont affectées par une translation (ou, si l’on aime mieux, par la transformation de Lorentz) de la même, manière que les forces électromagnétiques.

Il convient maintenant d’entrer dans les détails et d’examiner de plus près cette hypothèse. Si nous voulons que la force newtonienne soit affectée de cette façon par la transformation de Lorentz, nous ne pouvons plus admettre que cette force dépend uniquement de la position relative du corps attirant et du corps attiré à l’instant considéré. Elle devra dépendre en outre des vitesses des deux corps. Et ce n’est pas tout: il sera naturel de supposer que la force qui agit à l’instant t sur le corps attiré, dépend de la position et de la vitesse de ce corps à ce même instant t ; mais elle dépendra, en outre, de la position et de la vitesse du corps attirant, non pas à l’instant t , mais à un instant antérieur, comme si la gravitation avait mis un certain temps à se propager” – Henri Poincaré, 1905 ([80]).

“Most likely it would be unsatisfactory if the new understanding of the concept of time, which is characterized by the freedom of the Lorentz transformations, is applied to only a branch of physics.