

Segue que

$$\begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma f_0 - \beta\gamma f_1 \\ \gamma f_1 - \beta\gamma f_0 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_0 \\ f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{bmatrix}.$$

Acabamos de verificar então o seguinte resultado:

Proposição 1.20 *Sejam $f_0 = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ e $f'_0 = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v}'$ os trabalhos de $\mathbf{f}$ e $\mathbf{f}'$ nas direções $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$, respectivamente, então os quadriveores $(f_0, \mathbf{f})$ e $(f'_0, \mathbf{f}')$ são covariantes. Mais precisamente, temos*

$$(f'_0, \mathbf{f}') = T(f_0, \mathbf{f}).$$

Como consequência imediata do resultado anterior e das Proposições 1.11 e 1.15, concluímos que as seguintes expressões não dependem do referencial

$$f_0^2 - \mathbf{f}^2, \quad f_0 t - \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}, \quad \frac{f_0 - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}},$$

onde $\mathbf{f}^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$ e $\mathbf{x} = (t, \mathbf{r})$.

O quadrivetor $F_{\mathcal{L}} = (f_0, \mathbf{f}) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{f})$ é também chamado de **hiperforça** de Lorentz.

1.3 A gravitação relativística

“Lorentz a donc été obligé de compléter son hypothèse en supposant que les forces de toute origine, et en particulier la gravitation, sont affectées par une translation (ou, si l’on aime mieux, par la transformation de Lorentz) de la même, manière que les forces électromagnétiques.

Il convient maintenant d’entrer dans les détails et d’examiner de plus près cette hypothèse. Si nous voulons que la force newtonienne soit affectée de cette façon par la transformation de Lorentz, nous ne pouvons plus admettre que cette force dépend uniquement de la position relative du corps attirant et du corps attiré à l’instant considéré. Elle devra dépendre en outre des vitesses des deux corps. Et ce n’est pas tout: il sera naturel de supposer que la force qui agit à l’instant t sur le corps attiré, dépend de la position et de la vitesse de ce corps à ce même instant t ; mais elle dépendra, en outre, de la position et de la vitesse du corps attirant, non pas à l’instant t , mais à un instant antérieur, comme si la gravitation avait mis un certain temps à se propager” – Henri Poincaré, 1905 ([80]).

“Most likely it would be unsatisfactory if the new understanding of the concept of time, which is characterized by the freedom of the Lorentz transformations, is applied to only a branch of physics.

Now many authors say that classical mechanics is contrary to the relativity postulate, which is set here as the basis of electrodynamics.

In order to decide this let us concentrate on a special Lorentz transformation as determined by the equations (10), (11), (12) with a non-zero vector b from any direction and a magnitude $q < 1$.” – Hermann Minkowski, 1907 ([60], [62, Chap. III, App., pp. 96-97]).

Em seus artigos de 1905, tanto Poincaré (cf. [79, §7, pp. 64-65], [80, §7, pp. 64-65]) como Einstein ([28, §10, p. 22]) discutem o efeito longitudinal e transversal sobre a massa de um corpo sob a ação de uma transformação de Lorentz, confirmando as observações anteriores de Max Abraham ([88, §8.2, pp. 411-412]). Note-se que, embora o tenham feito por abordagens distintas, em ambos os casos a análise se faz para partículas em aceleração moderada. Entretanto, apenas Poincaré se debruça sobre a questão da gravidade de maneira mais aprofundada, tomando como ponto de partida seu princípio da relatividade, enunciado no *Congresso de Artes e Ciências de Saint-Louis* ([78]).

Note que Poincaré chega a discutir a questão da velocidade interferindo na expressão da força gravitacional ([79, §7, pp. 3-4]) e acaba por concluir que a gravidade é uma onda que se propaga na velocidade da luz ([80, §9]). De fato, na tentativa de obter as novas leis de atração entre dois corpos, Poincaré observa que são três as condições a serem satisfeitas:

- (1). A equação do movimento deverá ser invariante pela ação do grupo de Lorentz;
- (2). As componentes da força gravitacional F devem ser afetadas da mesma maneira que as forças eletromagnéticas;
- (3). Quando os dois corpos estiverem em repouso, dever-se-á regressar à lei de atração original.

Poincaré segue ainda algumas regras complementares, entre elas

- (4). Desviar-se o mínimo possível das equações originais da dinâmica.

Nesse momento ele lança mão de argumentos puramente geométricos (no sentido de F. Klein) e busca quadrivetores covariantes envolvendo tempo, posição, velocidade, trabalho, força, massa e momento linear no afã de obter uma candidata à relação que determine a dinâmica gravitacional e seja invariante pelo grupo de Lorentz. No entanto, nada indica que ele tenha realmente seguido na direção de reestabeler a força como a taxa de variação da quantidade de movimento. Essa tarefa ficaria reservada a Hermann Minkowski (cf. [60], [62, Ch. III, Appendix, p. 106]). Para tal tarefa, ele teve que desenvolver a noção de

espaço-tempo apresentada por H. Poincaré e introduzir o conceito de tempo próprio (cf. Definição 1.17).

No entanto, em vez de buscarmos essa relação seguindo a formulação original de Minkowski, o faremos sob a égide das ideias de Poincaré, buscando uma relação no formato de um quadrivetor covariante $\mathbf{P}$ representando uma generalização do momento linear e um quadrivetor covariante $\mathbf{F}$ generalizando a força, de maneira que a equação do movimento preserve a forma clássica $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{P}$ em algum sentido.

Por envolver a massa e a velocidade, qualquer quadrivetor que se candidate a representar uma generalização do conceito de momento linear deve envolver a expressão

$$m_o \mathbf{U} = m_o \frac{c(1, \frac{\mathbf{v}}{c})}{\left\| (1, \frac{\mathbf{v}}{c}) \right\|_{\mathcal{L}}},$$

onde $\mathbf{U} = \frac{c(1, \frac{\mathbf{v}}{c})}{\left\| (1, \frac{\mathbf{v}}{c}) \right\|_{\mathcal{L}}}$ é a quadrivelocidade nas coordenadas (x_0, x_1, x_2, x_3) e m_o é uma constante que determina a massa de um corpo medida em um certo referencial inercial fixado.² Sem dificuldade, se verifica que o quadrivetor

$$\mathbf{P} = m_o \mathbf{U} = m_o \frac{c(1, \frac{\mathbf{v}}{c})}{\left\| (1, \frac{\mathbf{v}}{c}) \right\|_{\mathcal{L}}},$$

onde $\mathbf{v} = (\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt})$, é um excelente candidato à generalização do momento linear, uma vez que é invariante por transformações de Lorentz (cf. 1.29) e que suas últimas três coordenadas se escrevem na forma $P = m\mathbf{v}$, onde $m = \frac{m_o}{\left\| (1, \frac{\mathbf{v}}{c}) \right\|_{\mathcal{L}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ e $v = \|\mathbf{v}\|$. Se v for insignificante quando comparado com a velocidade da luz, então recuperamos o antigo conceito de momento linear. Por outro lado, como tanto o momento linear como o tempo próprio são invariantes pelo grupo de Lorentz, então fica bem definido o quadrivetor

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau}$$

que será chamado de *hiperforça*. Para ter significado físico na relatividade restrita, é preciso mostrar o seguinte resultado:

Proposição 1.21 *A hiperforça é covariante com respeito ao grupo de Lorentz.*

Demonstração. Como toda transformação de Lorentz é uma transformação linear, então comuta com o operador de derivação $\frac{d}{d\tau}$. Segue que

$$\frac{d\mathbf{P}'}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(m_o \mathbf{U}') = \frac{d}{d\tau}(m_o T(\mathbf{U})) = \frac{d}{d\tau}(T(m_o \mathbf{U})) = T(\frac{d}{d\tau}(m_o \mathbf{U})) = T(\frac{d\mathbf{P}}{d\tau}).$$

Logo, $\mathbf{F}'$ e $\mathbf{F}$ são covariantes, i.e., $\mathbf{F}' = T(\mathbf{F})$. ■

²Note que não faz o menor sentido falar em massa de repouso, uma vez que não é possível identificar um referencial privilegiado onde possamos garantir a inexistência de movimento. Aliás, essa é a base da teoria iniciada com o experimento de Michelson e Morley.

Regressando às condições (1)-(4) de Poincaré, precisamos agora verificar qual relação guarda este quadrivetor com a força original da mecânica clássica. Primeiramente, recorde que nas coordenadas (x_0, x_1, x_2, x_3) o momento se escreve na forma

$$\mathbf{P} = m_o \mathbf{U} = \frac{m_o c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) = m \left(c, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right).$$

Agora recorde que $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$, de onde segue que $\mathbf{P}$ se escreve nas coordenadas (t, x, y, z) na forma

$$\mathbf{P} = m \left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Sendo $\mathbf{F} = (F_0, F_1, F_2, F_3)$ nestas últimas coordenadas, então temos

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \mathbf{F}.$$

Concluimos então que

$$\frac{dm}{dt} = \sqrt{1 - v^2/c^2} F_0 \quad (1.35)$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = \sqrt{1 - v^2/c^2} F_1 \quad (1.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dy}{dt} \right) = \sqrt{1 - v^2/c^2} F_2 \quad (1.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dz}{dt} \right) = \sqrt{1 - v^2/c^2} F_3 \quad (1.38)$$

Mais uma vez, se v é desprezível quando comparado com c , então as equações (1.36)-(1.38) nos fornecem as equações originais da dinâmica de corpos descrita na mecânica newtoniana. Observe ainda que as equações acima são exatamente aquelas obtidas originalmente por Hermann Minkowski em [60] (cf. [62, Ch. III, Appendix, p. 106]).

Neste momento é oportuno realizarmos uma pequena digressão. Apesar do quadrivetor invariante fornecer a pista de como devem ser as equações da mecânica, sua interpretação física só pode ser alcançada no espaço tridimensional dado por um referencial inercial que o modele, uma vez que todos os experimentos são realizados e mensurados nestes modelos tridimensionais. É no espaço tridimensional que nossa consciência e nossa razão atuam, é lá que interpretamos os dados experimentais. Finalizaremos esta observação recordando que a própria definição de variedade abstrata concorre para esta interpretação, uma vez que só a podemos conhecer através de suas cartas locais, da mesma forma que para interpretar o mundo físico, segundo a visão da relatividade restrita, é necessário um sistema de referenciais inerciais.

“La masse a deux aspects : c’est à la fois un coefficient d’inertie et une masse attirante entrant comme facteur dans l’attraction newtonienne. Si le

coefficient d'inertie n'est pas constant, la masse attirante pourra-t-elle l'être?
Voilà la question.” - Henri Poincaré [78, p. 317]

Em vista das *equações de Minkowski* (1.35)-(1.38) e da digressão acima, precisamos ressignificar algumas das grandezas físicas às quais estávamos habituados em mecânica clássica. A primeira observação aqui é que o conceito de massa se nos apresenta de uma forma diferente, como previra Poincaré. Agora ela já não é mais constante, mas varia com a velocidade, assumindo a forma

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (1.39)$$

Sua interpretação como um coeficiente de inércia que cresce com a velocidade foi confirmada em aceleradores de partículas, mostrando que a teoria da relatividade restrita é uma abordagem da realidade física mais precisa do que a mecânica de Newton.

Observando-se as equações de Minkowski, vemos que as componentes da força na mecânica clássica surgem de (1.36)-(1.38) quando tomamos $v = 0$. De fato, basta multiplicarmos por $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ as últimas três componentes do quadrivetor hiperforça. Isso mostra que parte deste quadrivetor ressignifica de maneira apropriada o conceito de força em mecânica clássica.

Precisamos compreender agora qual o significado tridimensional da primeira componente dos quadrivetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{F}$. Segue de (1.39) que

$$\begin{aligned} m_0 c^2 &= m^2 c^2 - m^2 v^2 \\ &= m^2 c^2 - (m \frac{dx}{dt})^2 - (m \frac{dy}{dt})^2 - (m \frac{dz}{dt})^2. \end{aligned}$$

Derivando-se essa equação com relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} m_0 c^2 \\ &= 2c^2 m \frac{dm}{dt} - 2(m \frac{dx}{dt}) \frac{d}{dt} (m \frac{dx}{dt}) - 2(m \frac{dy}{dt}) \frac{d}{dt} (m \frac{dy}{dt}) - 2(m \frac{dz}{dt}) \frac{d}{dt} (m \frac{dz}{dt}). \end{aligned}$$

Segue das equações de Minkowski que

$$d(mc^2) = c^2 F_0 dt = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \quad (1.40)$$

Logo, a taxa de variação de quantidade mc^2 coincide como o trabalho da força por unidade de tempo. Dessa forma, a grandeza $E = mc^2$ guarda relação com a energia cinética da mecânica clássica. Façamos uma análise mais detalhada desse objeto. De fato, considerando-se a expansão em séries da expressão

$$E = mc^2 = m_0 c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$$

concluimos que uma boa aproximação para esta expressão se dá por $E = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$ motivo pelo qual Minkowski chamou a relação (1.40) de lei da energia (*Energiesatz*). Essa relação foi antes conjecturada de forma um tanto intuitiva por Einstein em ([29]).

Observe que a covariância do quadrivetor massa-momento, ou energia-momento, já havia sido detectada por Poincaré em 1905 ([80, §9]), de onde ele teria estabelecido a relação $E = mc^2$, não fosse o fato de ter normalizado a velocidade da luz como $c = 1$. No entanto, a sua ressignificação apropriada, i.e., como um objeto físico oriundo de um quadrivetor covariante, só vem a ser realizada por Minkowski em 1907 (cf. [62, P. 107]). Em outras palavras, estamos ressaltando o fato de que a ressignificação destes objetos tem uma origem filosófica clara: o princípio da relatividade que, segundo Poincaré ([78]), estabelece a invariancia de todas as leis físicas por referenciais inerciais.

Note que essa relação entre energia, massa e velocidade da luz no vácuo foi observada primeiramente por Einstein em ([29]), mas de um forma um tanto intuitiva e matematicamente pouco formal. Einstein baseava seus raciocínios em experimentos mentais muitas vezes imprecisos e mesclava indistintamente conceitos newtonianos com relativísticos sem maiores explicações (cf. [49, p. 4]). Para citar um exemplo, basta observar como ele redefine o conceito de energia cinética.

Essa abordagem intuitiva e matematicamente pouco formal tem sido pedra fundamental no avanço da física teórica e até hoje permeia os mais diversos textos básicos de física sobre o assunto. No entanto, se nós queremos nos apoiar no princípio filosófico da relatividade, então toda a ressignificação da mecânica newtoniana tem de se basear em grandezas covariantes e suas comparações com o mundo clássico.

Finalizamos esse parágrafo recordando que na visão de Poincaré a gravidade se propaga como uma onda, sendo ele o primeiro cientista conhecido a realizar tal afirmação, seguida de cálculos em seu modelo de partícula de forma tal a sustentá-la.

“Rappelons que quand nous parlons de la position ou de la vitesse du corps attirant, il s’agit de sa position ou de sa vitesse au moment où l’onde gravifique le quitte; pour le corps attiré, au contraire, il s’agit de sa position ou de sa vitesse du moment où l’onde gravifique l’atteint, cette onde étant supposée se propager avec la vitesse de la lumière.” – Henri Poincaré [80, § 9, p. 174]

1.4 Quadrivetores e geometria lorentziana

Nesta seção, vamos interpretar os resultados da seção anterior com o intuito de geometrizar adequadamente tanto o espaço quanto as grandezas em estudo.

Antes mesmo da relatividade geral, a relatividade restrita já oferece um modelo geométrico rico o suficiente para explorarmos, mesmo que seja como uma motivação para saltos mais distantes. Começamos observando que cada referencial inercial fornece um

par (U, φ) , onde $U = \mathbb{R}^{1,3}$ e $\varphi(p) = \mathbf{x}$ oferece um sistema de coordenadas que permite identificar cada ponto p de $\mathbb{R}^{1,3}$ com as coordenadas $\mathbf{x}$. Como existem inúmeros sistemas de referenciais a escolher, também existe uma miríade de possibilidades para a escolha do sistema de coordenadas.

Definição 1.22 *Diremos que um espaço topológico M é uma variedade lorentziana se admitir uma atlas lorentziano $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, i.e., tal que*

- i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma cobertura aberta de M ;
- ii) $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^{1,3}$ é um homeomorfismo suave entre U_α e um aberto de $\mathbb{R}^{1,3}$ para cada $\alpha \in I$;
- iii) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é um isomorfismo linear contido em $O(1,3)$.

Desta forma, um ponto $p \in M$ poderá ser descrito tanto pelas coordenadas $\mathbf{x}_\alpha$, como pelas coordenadas $\mathbf{x}_\beta$, desde que $\varphi_\alpha(p) = \mathbf{x}_\alpha$ e $\varphi_\beta(p) = \mathbf{x}_\beta$. Como $g_{\beta\alpha} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in O(1,3)$, isto equivale a dizer que $\mathbf{x}_\alpha$ e $\mathbf{x}_\beta$ são covariantes. A mesma interpretação pode ser dado à covariância entre os quadrivetores carga-corrente.

Embora este não seja o caso para os espaços euclidianos, em geral o espaço das posições se diferencia em muito do espaço das velocidades. Em todo caso, iremos definir o conceito de espaço tangente à uma variedade lorentziana como segue: a cada ponto no espaço a velocidade pode ser vista como o conjunto das curvas diferenciáveis que passam por este ponto e possuem a mesma derivada. Em cada ponto teremos então um espaço vetorial isomorfo a $\mathbb{R}^{1,3}$, i.e., $T_p\mathbb{R}^{1,3} = \{\mathbf{p}\} \times \mathbb{R}^{1,3}$. A união de tais espaços

$$T\mathbb{R}^{1,3} = \bigcup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{1,3}} T_p\mathbb{R}^{1,3}$$

será chamado de espaço tangente a $\mathbb{R}^{1,3}$ e $T_p\mathbb{R}^{1,3}$ será chamada de fibra tangente em p . Note que a essa estrutura está associada a projeção natural

$$\begin{aligned} \pi: T\mathbb{R}^{1,3} &\longrightarrow \mathbb{R}^{1,3} \\ (\mathbf{p}, \mathbf{v}) &\mapsto \mathbf{p} \end{aligned}$$

Uma aplicação suave $s: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow T\mathbb{R}^{1,3}$ será chamada de seção se associar a cada ponto de $\mathbb{R}^{1,3}$ um ponto em sua fibra, i.e., se $\pi \circ s(p) = p$. Um *referencial* é sempre definido por 4 seções linearmente independentes. Uma referencial canonicamente associado à carta φ_α é aquele dada por $\mathbf{s}_{\alpha,i}(p) = [d\varphi_\alpha(p)]^{-1}(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{e}_i$, onde $\mathbf{x}_\alpha = \varphi_\alpha(p)$ e $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{1,3}$. Um referencial se comporta como uma base de um espaço vetorial, com a diferença de não ser necessariamente constante. Nesse sentido, como $g_{\beta\alpha}$ é linear, sua derivada coincide com a própria aplicação. Dessa forma, a covariância entre

$\mathbf{U}_\alpha = \frac{(1, \mathbf{v}_\alpha)}{\|(1, \mathbf{v}_\alpha)\|_{\mathcal{L}}}$ e $\mathbf{U}_\beta = \frac{(1, \mathbf{v}_\beta)}{\|(1, \mathbf{v}_\beta)\|_{\mathcal{L}}}$ significa que estes representam a mesma seção do espaço tangente, i.e.,

$$\varphi_\alpha^* \mathbf{U}_\alpha = \mathbf{U} = \varphi_\beta^* \mathbf{U}_\beta,$$

equivale a dizer que

$$(\mathbf{x}_\beta, \mathbf{U}_\beta) = g_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{U}_\alpha) = (g_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{x}_\alpha, g_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{U}_\alpha).$$

Raciocínio análogo pode ser usado para o quadrivetor trabalho-força.

Neste conexto, a métrica de Lorentz tem a mesma expressão independentemente de referencial, i.e.,

$$J_{\mathcal{L}} = dx_{\alpha,0} \otimes dx_{\alpha,0} - dx_{\alpha,1} \otimes dx_{\alpha,1} - dx_{\alpha,2} \otimes dx_{\alpha,2} - dx_{\alpha,3} \otimes dx_{\alpha,3},$$

independentemente de $\alpha \in I$. De maneira análoga, a diferencial $dJ_{\mathcal{L}}^2: T\mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}$ assume a mesma forma independentemente do referencial. Mais precisamente,

$$\frac{1}{2} dJ_{\mathcal{L}}^2(\mathbf{x}_\alpha) = x_{\alpha,0} \otimes dx_{\alpha,0} - x_{\alpha,1} \otimes dx_{\alpha,1} - x_{\alpha,2} \otimes dx_{\alpha,2} - x_{\alpha,3} \otimes dx_{\alpha,3}$$

qualquer que seja $\mathbf{x}_\alpha = (x_{\alpha,0}, x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, x_{\alpha,3}) \in \mathbb{R}^{1,3}$. Além disso, $dJ_{\mathcal{L}}^2$ é invariante pela ação natural do grupo de Lorentz em $T\mathbb{R}^4$, i.e.,

$$dJ_L^2(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{U}_\alpha = 2J_L(\mathbf{x}_\beta, \mathbf{U}_\beta) = 2J_L(g_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{x}_\alpha, g_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{U}_\alpha) = dJ_L^2(g_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{x}_\alpha) \cdot (g_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{U}_\alpha)$$

para todo $g_{\beta\alpha} \in O(1, 3)$.

Capítulo 2

Formulando o eletromagnetismo em termos de formas

No intuito de melhor entendermos o que se passa no estudo da dinâmica de uma partícula carregada, precisamos conhecer o comportamento dinâmico dessa partícula em diferentes referenciais inerciais. Para concluirmos esse desiderato, iremos necessitar do conceito de cálculo exterior de Cartan. Essa tecnologia será também útil para melhor descrevermos o campo eletromagnético e as equações de Maxwell. Trata-se, portanto, da imersão desses conceitos físicos em um novo arcabouço geométrico.

2.1 Tensores e formas diferenciais

Conveniente recordar que originalmente Maxwell propôs a sua teoria sem o concurso do conceito de campo de vetores e do cálculo vetorial, sendo esta uma contribuição do Oliver Heaviside a partir da obra de Hermann Günter Grassman ([42]). Sem este dispositivo, Maxwell teve de trabalhar com as seis funções diferenciáveis correspondentes às componentes de cada campo em vez de lidar com dois campos de vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Além disso, em vez das quatro equações diferenciais (1.2) - (1.5), ele enfrentou oito.

É conveniente observar que a compreensão da natureza avança de braços dados com advento de novas estruturas geométricas, que permitem uma melhor apreciação das leis naturais. Em nosso caso, temos a influência direta do desenvolvimento de certas áreas da matemática para novas formulações da teoria de Maxwell, a saber o cálculo tensorial desenvolvido por Gregorio Ricci-Curbastro e o cálculo exterior desenvolvido por Élie Cartan, o primeiro em por volta de 1900 ([82]) e o segundo na década de 1920 ([10]).

De fato, as formas diferenciais se originaram a partir da álgebra de Grassmann ([43]), tendo sido mais tarde desenvolvidas por Élie Cartan. Em 1844, Grassmann publicou seu livro intitulado *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (cf. [42, 43]), no qual desenvolve a ideia de uma álgebra na qual os símbolos representam

entidades geométricas, como pontos, retas e planos, e as operações correspondem a certas regras de caráter geométrico. Grassmann introduziu aquilo que hoje chamamos de álgebra exterior, baseado no conceito de produto exterior

$$a \wedge b = -b \wedge a.$$

Com base na álgebra exterior de Grassmann, Cartan desenvolveu as formas diferenciais e seu cálculo exterior ([10]). Este tem se mostrado uma linguagem natural para a geometria e a física, em particular para a teoria de campos, uma vez que sua anitissimetria fornece belas fórmulas matemáticas que simplificam a solução de diversos problemas em ambas as áreas ([83]). Faremos aqui um breve resumo sobre tensores e formas definidos sobre espaços vetoriais.

2.1.1 Tensores

Veamos agora a abordagem via tensores, populazidada na física por A. Einstein em sua relatividade geral de 1916.

Definição 2.1 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e E um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, então o conjunto dos funcionais lineares $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ será chamado de **espaço dual** de E e será denotado por E^* .*

Proposição 2.2 *Seja $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base do $\mathbb{K}$ -espaço vetorial E e $\beta^* = \{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\} \subset E^*$ é definida por $\varepsilon^i(e_j) = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, então β^* é uma base de E^* , chamada **base dual** de β .*

Definição 2.3 *Sejam E_i e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ ($i = 1, \dots, r$), então diremos que a aplicação $\varphi: E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow F$ é **r -linear** quando seus valores $\varphi(v_1, \dots, v_r)$ dependerem linearmente de cada uma das variáveis $v_i \in E$, i.e.,*

$$\begin{aligned}\varphi(v_1, \dots, v_i + w_i, \dots, v_r) &= \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + \varphi(v_1, \dots, w_i, \dots, v_r) \\ \varphi(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_r) &= \lambda \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r)\end{aligned}$$

O conjunto das aplicações r -lineares assim definidas será denotado por $L(E_1, \dots, E_r; F)$.

Definição 2.4 *Seja E um espaço vetorial, então $T_s^r(E) = L(\overbrace{E^*, \dots, E^*}^{r \text{ vezes}}, \overbrace{E, \dots, E}^{s \text{ vezes}}; F)$ será chamado de conjunto de **tensores** contravariantes de ordem r e covariantes de ordem s ou **tensores** do tipo (r, s) . Dados $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(E)$ e $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(E)$, o **produto tensorial** de t_1 por t_2 é o tensor $t_1 \otimes t_2 \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(E)$ definido por*

$$\begin{aligned}t_1 \otimes t_2(\alpha^1, \dots, \alpha^{r_1}, \beta^1, \dots, \beta^{r_2}, v_1, \dots, v_{s_1}, w_1, \dots, w_{s_2}) \\ = t_1(\alpha^1, \dots, \alpha^{r_1}, v_1, \dots, v_{s_1}) t_2(\beta^1, \dots, \beta^{r_2}, w_1, \dots, w_{s_2}),\end{aligned}$$

onde $\alpha^i, \beta^j \in E^*$ e $v_k, w_\ell \in E$, para todo $i = 1, \dots, r_1$, $j = 1, \dots, r_2$ e $\ell = 1, \dots, s_2$.

Proposição 2.5 *Seja E um espaço vetorial de dimensão n , então $T_s^r(E)$ possui a estrutura de um espaço vetorial de dimensão n^{r+s} . Mais precisamente, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ordenada de E e $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ sua base dual, então $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_s} : i_k, j_k = 1, \dots, n\}$ é uma base para $T_r^s(E)$.*

Definição 2.6 *Seja E um espaço vetorial real, então um **campo tensorial** do tipo (r, s) sobre E é uma seção C^∞ de $T_s^r(M)$. Tal conjunto será denotado, indistintamente, por $\mathcal{T}_s^r(E)$ ou por $\Gamma^\infty(T_s^r(E))$. Um **campo de vetores** sobre E é um elemento de $\mathcal{T}_0^1(E) = \mathfrak{X}(E)$. Um **campo covetorial** é um elemento de $\mathcal{T}_1^0(E) = \mathfrak{X}(E^*)$.*

2.1.2 Formas diferenciais

As formas diferenciais foram introduzidas por Élie Cartan em 1922 ([10]). A menos de alguns ajustes, a terminologia usada neste livro é aquela que tomou forma na literatura corrente e é a que adotaremos na sequência. ¹

Definição 2.7 *Um tensor ω de tipo $(0, p)$ sobre um espaço vetorial de dimensão finita E será chamado de **tensor alternado** de tipo $(0, p)$ ou **p -forma** se for completamente antissimétrico, i.e., para todos $X_1, \dots, X_p \in E$ temos que*

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) = (-1)^\sigma \omega(X_1, \dots, X_p),$$

onde $(\sigma(1), \dots, \sigma(p))$ é uma permutação de $(1, \dots, p)$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal desta permutação. O espaço de todas as p -formas sobre uma variedade M será denotado por $\Lambda^p(M)$.

Recorde da definição de determinante na álgebra linear que $(-1)^\pi$ representa o sinal da permutação $\pi \in S_k$.

Definição 2.8 *O operador de alternância $\text{alt}: T_p^0(E) \rightarrow T_p^0(E)$ é definido por*

$$\text{alt} \zeta(e_1, \dots, e_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi \zeta(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(k)}),$$

Note que a soma acima se dá sobre todos os $p!$ elementos de S_k .

O operador de alternância nos permite obter formas diferenciais a partir de tensores do tipo $(0, p)$ quaisquer.

Proposição 2.9 *Se $\zeta \in T_p^0(E)$, então $\text{alt}(\zeta) \in \Lambda^p(E)$.*

¹Observe-se que aqui iremos utilizar a notação corrente da derivada exterior, introduzida por Kähler, em vez de $\prime$ utilizado por Cartan. Da mesma forma, o produto exterior será denotado através do produto wedge $\wedge$ em vez dos colchetes à moda de Lie introduzidos originalmente por Cartan.

Como o produto tensorial de formas em geral não produz uma forma diferencial, esse operador nos permite definir um produto fechado no espaço de formas da maneira seguinte:

Definição 2.10 Se $\zeta \in T_p^0(E)$ e $\xi \in T_q^0(E)$, então a $(p+q)$ -forma

$$\zeta \wedge \xi := \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{alt}(\zeta \otimes \xi)$$

será chamada de **produto exterior** entre ζ e ξ .

Exemplo 2.11 Se $\alpha, \beta \in \Lambda^1(E)$, então $\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$. Em particular, $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ e $\alpha \wedge \alpha = 0$

Proposição 2.12 O operador $\wedge: \Lambda^p(E) \times \Lambda^q(E) \rightarrow \Lambda^{p+q}(E)$ é bilinear e satisfaz as seguintes propriedades

- (i) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$;
- (iii) $\alpha \wedge (\beta \wedge \zeta) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \zeta$.

para todo $\alpha \in \Lambda^p(E)$, $\beta \in \Lambda^q(E)$ e $\zeta \in \Lambda^r(E)$.

A soma direta dos espaços $\Lambda(E) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+} \Lambda^p(E)$ com sua estrutura de espaço vetorial real e multiplicação induzida por $\wedge$ será chamada **álgebra de Grassmann** ou **álgebra exterior**.

Observação 2.13 A definição de produto exterior também pode ser estendida a vetores ou campos de vetores. Por exemplo, no caso bidimensional o produto exterior de dois vetores pode ser interpretada geometricamente como porções de planos orientados. O produto exterior de vetores gozará das propriedades de bilinearidade, antissimetria e distributividade em relação à soma (cf. [25], [24]).

Proposição 2.14 Seja E um espaço vetorial de dimensão n , então

$$\dim \Lambda^p(E) = \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{se } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{se } p > n \end{cases}$$

Em particular, a álgebra exterior $\Lambda(E) := \bigoplus \Lambda^p(E)$ possui dimensão igual a 2^n . Mais ainda, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de E e $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ é sua base dual, então

$$\{\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

é uma base de $\Lambda^p(E)$.

Para todo $p \in \mathbb{Z}_+$, a aplicação linear $T: E \rightarrow F$ determina uma nova aplicação linear $T^*: \Lambda^p(F) \rightarrow \Lambda^p(E)$, definida por

$$(T^*\omega)(v_1, \dots, v_r) = \omega(T(v_1), \dots, T(v_r)),$$

quaisquer que sejam $\omega \in \Lambda^r(F)$ e $v_1, \dots, v_r \in E$. A p -forma $T^*\omega$ será chamada de **imagem inversa** ou **pull-back** de ω por T .

Definição 2.15 *Seja E um espaço vetorial real, então uma **forma p -diferencial** sobre E é uma seção C^∞ de $\Lambda^p(E)$. O conjunto das p -formas diferenciais será denotado $\Omega^p(E)$.*

Exemplo 2.16 *Um campo covetorial coincide com uma 1-forma diferencial uma vez que $\Omega^1(E) = \mathcal{T}_1^0(E) = \mathfrak{X}(E^*)$.*

Podemos estender o conceito de derivada de uma função para formas diferenciais da seguinte maneira:

Teorema 2.17 *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$, então existe uma única família de aplicações $d^p(U): \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$, $p = 0, \dots, n$, denotada simplesmente por d tal que:*

(i) *Para $\alpha \in \Omega^p(U)$ e $\beta \in \Omega^q(U)$, temos*

$$\begin{aligned} d(\alpha + \beta) &= d\alpha + d\beta \\ d(\alpha \wedge \beta) &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

(ii) *Se $f \in C^\infty$ é uma função real, então a derivada exterior df coincide com a derivada usual;*

(iii) $d \circ d = 0$.

A família de derivações acima será chamada de **derivada exterior** em M .

Observação 2.18 *O conceito de derivação exterior foi introduzido por Élie Cartan com o objetivo de atender à versão generalizada do teorema de Stokes (cf. [10]).*

Definição 2.19 *Seja $X \in \mathfrak{X}(E)$ um campo de vetores numa variedade M , então a aplicação $i_X: \Omega^p(E) \rightarrow \Omega^{p-1}(E)$, dada por*

$$i_X \omega(X_2, \dots, X_p) = \begin{cases} \omega(X, X_2, \dots, X_p) & \text{se } p > 0, \\ 0 & \text{se } p = 0, \end{cases}$$

*será chamada **produto interior** de ω por X .*

Proposição 2.20 *Seja X um campo de vetores sobre E , $\omega \in \Lambda^p(E)$ e $\eta \in \Lambda^q(E)$, então*

$$\mathbf{i}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathbf{i}_X\omega) \wedge \eta + (-1)^p\omega \wedge (\mathbf{i}_X\eta)$$

Diremos que uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(E)$ é uma **forma fechada** se $d\omega = 0$ e **forma exata** se existe $\alpha \in \Lambda^{k-1}(E)$ tal que $\omega = d\alpha$. Em particular, segue do Teorema 2.17 que toda forma exata é uma forma fechada. A recíproca desta afirmação não é verdadeira em geral. No entanto, temos a seguinte recíproca parcial.

Lema 2.21 (de Poincaré) *Seja E um espaço vetorial real e $\omega \in \Omega(E)$ uma forma fechada, então para cada $x \in E$, existe uma vizinhança U de x para a qual $\omega|_U$ é exata.*

2.1.3 Formas diferenciais em coordenadas locais

Iremos agora expressar formas diferenciais em abertos de $\mathbb{R}^n$ em coordenadas locais.

Sendo $\{dx^i\}$ a base dual da base canônica de $\mathbb{R}^n$, segue de um cálculo imediato que o operador linear dx^i representa a projeção na i -ésima coordenada de um vetor dado.

Definição 2.22 Lema 2.23 *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e A uma p -forma sobre U , dado um sistema de coordenadas locais x_μ para U , então A se escreve (na notação de Einstein) como*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{p!} A_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

onde $A_{i_1 \dots i_p} \in C^\infty(U)$ para todos $i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n$.

O espaço das formas diferenciais possui uma estrutura de álgebra diferencial definida como segue:

Proposição 2.24 *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} \in \Omega^p(U)$ e $\mathcal{B} \in \Omega^q(U)$, caracterizadas pelas componentes $A_{i_1 \dots i_p}$ e $B_{j_1 \dots j_q}$ num sistema de coordenadas locais x_μ , i.e.,*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{p!} A_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad e \quad \mathcal{B} = \frac{1}{q!} B_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q},$$

então seu produto exterior se escreve como a $(p+q)$ -forma:

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{i_1 \dots i_p} \cdot B_{j_1 \dots j_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}.$$

Proposição 2.25 *Dada uma p -forma $\mathcal{A}$, então sua derivada exterior se escreve na forma*

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{p!} \partial_\mu A_{i_1 \dots i_p} dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$