

2.2 As equações de Maxwell em termos de formas

Faremos aqui uma reformulação das leis de Maxwell em termos de formas diferenciais.

Após finalizar em 1922 o desenvolvimento do cálculo exterior com formas diferenciais ([10]), Cartan passou os três anos seguintes reescrevendo as leis da relatividade geral de Einstein em termos dessa nova teoria numa série de três artigos com o título “*Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*” e diferentes subtítulos. Assim, é no segundo artigo que ele aborda a reformulação das leis de Maxwell em termos de formas diferenciais ([12, Chap. V, p. 17]). Aparentemente, o primeiro livro texto onde tal reformulação aparece é o de H. Flanders, do início da década de 1960 (cf. [33]). Tal abordagem foi ainda popularizada por Misner-Thorne-Wheeler ([63]) e outros papers que lhes seguiram (cf. [83]).

2.2.1 O operador $*$ de Hodge em $\mathbb{R}^{1,3}$ e a codiferencial

Observe que os espaços $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ e $\Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n)$ têm a mesma dimensão. Com a finalidade de simplificarmos as equações de Maxwell não homogêneas em termos de formas diferenciais, iremos agora introduzir três isomorfismos lineares em $\Lambda(\mathbb{R}^{1,3})$ chamados de estrela de Hodge (mais tarde veremos que estes estão associados à chamada métrica de Lorentz):

$$\begin{aligned} * : \Lambda^0(\mathbb{R}^{1,3}) &\longrightarrow \Lambda^4(\mathbb{R}^{1,3}) & | & \quad * f = f dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ * : \Lambda^1(\mathbb{R}^{1,3}) &\longrightarrow \Lambda^3(\mathbb{R}^{1,3}) & | & \quad \begin{cases} *dx^0 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ *dx^1 = -dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ *dx^2 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ *dx^3 = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{cases} \\ * : \Lambda^2(\mathbb{R}^{1,3}) &\longrightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^{1,3}) & | & \quad \begin{cases} *(dx^0 \wedge dx^1) = -dx^2 \wedge dx^3 \\ *(dx^0 \wedge dx^2) = dx^1 \wedge dx^3 \\ *(dx^2 \wedge dx^3) = -dx^1 \wedge dx^0 \\ *(dx^1 \wedge dx^2) = dx^0 \wedge dx^3 \\ *(dx^1 \wedge dx^3) = -dx^0 \wedge dx^2 \\ *(dx^2 \wedge dx^3) = dx^0 \wedge dx^1 \end{cases} \end{aligned}$$

Sem dificuldade, podemos provar que a estrela de Hodge satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 2.26 *Seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um isomorfismo linear, então*

$$T^* * = -\det(T) * T.$$

Proposição 2.27 *O operador estrela de Hodge sobre $\mathbb{R}^{1,3}$ satisfaz a seguinte relação*

$$* * \alpha = (-1)^{k(n-k)+1} \alpha$$

para todo $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^4)$.

Exemplo 2.28 Vamos encontrar o dual de Hodge de uma 2-forma $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{R}^{1,3}$ (com métrica de Lorentz). Seja

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = & F_{01}dx^0 \wedge dx^1 + F_{02}dx^0 \wedge dx^2 + F_{03}dx^0 \wedge dx^3 \\ & + F_{12}dx^1 \wedge dx^2 + F_{13}dx^1 \wedge dx^3 + F_{23}dx^2 \wedge dx^3,\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}*\mathcal{F} = & F_{01} * (dx^0 \wedge dx^1) + F_{02} * (dx^0 \wedge dx^2) + F_{03} * (dx^0 \wedge dx^3) \\ & + F_{12} * (dx^1 \wedge dx^2) + F_{13} * (dx^1 \wedge dx^3) + F_{23} * (dx^2 \wedge dx^3) \\ = & -F_{01}dx^2 \wedge dx^3 + F_{02}dx^1 \wedge dx^3 - F_{03}dx^1 \wedge dx^2 \\ & + F_{12}dx^0 \wedge dx^3 - F_{13}dx^0 \wedge dx^2 + F_{23}dx^0 \wedge dx^1.\end{aligned}$$

Exemplo 2.29 Vamos encontrar o dual de Hodge de uma 3-forma $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{R}^{1,3}$ (com métrica de Lorentz). Sendo

$$\mathcal{F} = F_{123}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + F_{023}dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + F_{013}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + F_{012}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2,$$

então

$$\begin{aligned}*\mathcal{F} = & F_{123} * (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) + F_{023} * (dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3) + F_{013} * (dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3) \\ & + F_{012} * (dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2) \\ = & -F_{123} * *dx^0 - F_{023} * *dx^1 + F_{013} * *dx^2 - F_{012} * *dx^3.\end{aligned}$$

Como para uma 1-forma α temos $* * \alpha = (-1)^{1(4-1)+1}\alpha = \alpha$, então

$$*\mathcal{F} = -F_{123}dx^0 - F_{023}dx^1 + F_{013}dx^2 - F_{012}dx^3$$

A partir do operador estrela de Hodge, podemos construir a seguinte operador de antiderivação.

Definição 2.30 Dada uma p -forma $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{R}^4$, definimos a codiferencial $\delta\mathcal{A}$ da p -forma $\mathcal{A}$, como sendo a $(p-1)$ -forma:

$$\delta\mathcal{A} = (-1)^{p(n-p+1)+1} * d * \mathcal{A}.$$

Vejamos agora algumas propriedades elementares desse operador.

Proposição 2.31 O operador codiferencial $\delta: \Omega^*(\mathbb{R}^{1,3}) \rightarrow \Omega^{*-1}(\mathbb{R}^{1,3})$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\delta(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \delta\mathcal{A} + \delta\mathcal{B}$;
2. $\delta(\lambda\mathcal{A}) = \lambda(\delta\mathcal{A})$;

3. $\delta^2 = 0$.

Demonstração. A linearidade segue diretamente do fato da codiferencial ser definida em termos do operador de Hodge e da derivada exterior, pois ambos são operadores lineares. A última propriedade segue diretamente do Teorema 2.27 e do fato de $d^2 = 0$. ■

Os dois exemplos a seguir serão importantes no estudo do eletromagnetismo.

Exemplo 2.32 *Vamos calcular a codiferencial de uma 1-forma $\mathcal{G}$ sobre $\mathbb{R}^{1,3}$. Por definição, temos*

$$\delta\mathcal{G} = (-1)^{p(n-p+1)+1} * d * \mathcal{G},$$

onde $p = 1$, $n = 4$ e $s = 1$. Assim $\delta\mathcal{G} = - * d * \mathcal{G}$. Sendo $\mathcal{G} = G_0 dx^0 + G_1 dx^1 + G_2 dx^2 + G_3 dx^3$, então

$$*\mathcal{G} = -G_0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - G_1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + G_2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - G_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d * \mathcal{G} &= -\partial_0 G_0 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \partial_1 G_1 dx^1 \wedge dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + \partial_2 G_2 dx^2 \wedge dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - \partial_3 G_3 dx^3 \wedge dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= [-\partial_0 G_0 + \partial_1 G_1 + \partial_2 G_2 + \partial_3 G_3] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} *d * \mathcal{G} &= [-\partial_0 G_0 + \partial_1 G_1 + \partial_2 G_2 + \partial_3 G_3] * dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= [-\partial_0 G_0 + \partial_1 G_1 + \partial_2 G_2 + \partial_3 G_3] * * 1 \\ &= -[-\partial_0 G_0 + \partial_1 G_1 + \partial_2 G_2 + \partial_3 G_3]. \end{aligned}$$

Segue que

$$\delta\mathcal{G} = - * d * \mathcal{G} = -\partial_0 G_0 + \partial_1 G_1 + \partial_2 G_2 + \partial_3 G_3.$$

Exemplo 2.33 *Passemos agora ao cálculo da codiferencial de uma 2-forma $\mathcal{F}$ em $\mathbb{R}^{1,3}$. Sendo*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= F_{01} dx^0 \wedge dx^1 + F_{02} dx^0 \wedge dx^2 + F_{03} dx^0 \wedge dx^3 \\ &\quad + F_{12} dx^1 \wedge dx^2 + F_{13} dx^1 \wedge dx^3 + F_{23} dx^2 \wedge dx^3, \end{aligned}$$

então sabemos do Exemplo 2.28 que

$$\begin{aligned} *\mathcal{F} &= -F_{01} dx^2 \wedge dx^3 + F_{02} dx^1 \wedge dx^3 - F_{03} dx^1 \wedge dx^2 \\ &\quad + F_{12} dx^0 \wedge dx^3 - F_{13} dx^0 \wedge dx^2 + F_{23} dx^0 \wedge dx^1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
d * \mathcal{F} &= -(\partial_0 F_{01} dx^0 + \partial_1 F_{01} dx^1) \wedge dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_0 F_{02} dx^0 + \partial_2 F_{02} dx^2) \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
&\quad - (\partial_0 F_{03} dx^0 + \partial_3 F_{03} dx^3) \wedge dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_1 F_{12} dx^1 + \partial_2 F_{12} dx^2) \wedge dx^0 \wedge dx^3 \\
&\quad - (\partial_1 F_{13} dx^1 + \partial_3 F_{13} dx^3) \wedge dx^0 \wedge dx^2 + (\partial_2 F_{23} dx^2 + \partial_3 F_{23} dx^3) \wedge dx^0 \wedge dx^1 \\
&= (-\partial_1 F_{01} - \partial_2 F_{02} - \partial_3 F_{03}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + (-\partial_0 F_{01} - \partial_2 F_{12} - \partial_3 F_{13}) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + (\partial_0 F_{02} - \partial_1 F_{12} + \partial_3 F_{23}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + (-\partial_0 F_{03} + \partial_1 F_{13} + \partial_2 F_{23}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned}$$

Temos então,

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{F} &= (-1)^{2(4-2+1)+1} * d * \mathcal{F} \\
&= - * d * \mathcal{F} \\
&= * \mathcal{G},
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{G}$ é a 3-forma dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= (\partial_1 F_{01} + \partial_2 F_{02} + \partial_3 F_{03}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_0 F_{01} + \partial_2 F_{12} + \partial_3 F_{13}) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + (-\partial_0 F_{02} + \partial_1 F_{12} - \partial_3 F_{23}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + (\partial_0 F_{03} - \partial_1 F_{13} - \partial_2 F_{23}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned}$$

2.2.2 A forma eletromagnética e o tensor carga-corrente

“Les lacunes formelles laissées par Lorentz furent remplies par Poincaré. Ce dernier formule le principe de la relativité comme une règle générale et rigoureuse. Poincaré, comme d’ailleurs les autres sus-mentionnés, suppose que les équations de Maxwell sont valables même dans le vide, et il en déduit que toutes les lois de la nature doivent être covariantes par rapport aux transformations de Lorentz. L’invariance des dimensions d’un corps dans les directions perpendiculaires à son mouvement est une conséquence naturelle de la nécessité, pour l’ensemble des transformations de Lorentz, de former un groupe mathématique, groupe dont l’ensemble des rotations ordinaires des axes de coordonnées est un sous groupe vide. De plus Poincaré corrigea les formules des transformations données par Lorentz pour la densité de charge et la vitesse et obtient ainsi une totale covariance des équations de la théorie de l’électron”
 – W. Pauli, 1921 ([72]).

É chegado então o momento de descrever o ente matemático que dá forma ao chamado campo eletromagnético. Grosso modo, considerando-se dois referenciais inerciais distintos com coordenadas (x, y, z) e (x', y', z') , os campos elétrico e magnético (formulação vetorial) irão assumir a forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= E_x \frac{\partial}{\partial x} + E_y \frac{\partial}{\partial y} + E_z \frac{\partial}{\partial z}, & \mathbf{B} &= B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z}, \\
\mathbf{E}' &= E'_{x'} \frac{\partial}{\partial x'} + E'_{y'} \frac{\partial}{\partial y'} + E'_{z'} \frac{\partial}{\partial z'}, & \mathbf{B}' &= B'_{x'} \frac{\partial}{\partial x'} + B'_{y'} \frac{\partial}{\partial y'} + B'_{z'} \frac{\partial}{\partial z'},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} E'_{x'} &= E_x, & E'_{y'} &= \gamma(E_y - \beta B_z), & E'_{z'} &= \gamma(E_z + \beta B_y), \\ B'_{x'} &= B_x, & B'_{y'} &= \gamma(B_y - \beta E_z), & B'_{z'} &= \gamma(B_z + \beta E_y). \end{aligned}$$

Em outras palavras, dependendo do referencial, os campos elétrico e magnético fundem-se em um só objeto. É o estudo do comportamento destas componentes dos campos elétrico e magnético por transformações de Lorentz que sugerem a definição da forma eletromagnética a seguir.

Podemos agora formular a teoria de Maxwell em termos do cálculo exterior. Vamos considerar duas formas diferenciais

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} F_{ij} dx^{ij} = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j \quad \text{e} \quad \mathcal{J} = J_{ijk} dx^{ijk} = J_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k,$$

dadas em coordenadas locais de $\mathbb{R}^{1,3}$ por

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= E_1 dx^0 \wedge dx^1 + E_2 dx^0 \wedge dx^2 + E_3 dx^0 \wedge dx^3 \\ &\quad - B_1 dx^2 \wedge dx^3 - B_3 dx^1 \wedge dx^2 + B_2 dx^1 \wedge dx^3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\mathcal{J} = \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - j_1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + j_2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - j_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2. \quad (2.2)$$

A 2-forma $\mathcal{F}$ será chamada *forma de campo eletromagnético* e a 3-forma $\mathcal{J}$ será chamada de *forma de carga-corrente*. Note que a representação matricial de $\mathcal{F}$ é dada por

$$[F_{ij}] = \begin{bmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

O que faremos agora é encontrar a formulação das equações de Maxwell nessa nova linguagem.

Proposição 2.34 *As equações de Maxwell homogêneas*

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

são equivalentes à equação

$$d\mathcal{F} = 0.$$

Demonstração. Sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= E_1 dx^0 \wedge dx^1 + E_2 dx^0 \wedge dx^2 + E_3 dx^0 \wedge dx^3 \\ &\quad - B_1 dx^2 \wedge dx^3 - B_3 dx^1 \wedge dx^2 + B_2 dx^1 \wedge dx^3, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{F} &= (\partial_2 E_1 dx^2 + \partial_3 E_1 dx^3) \wedge dx^0 \wedge dx^1 + (\partial_1 E_2 dx^1 + \partial_3 E_2 dx^3) \wedge dx^0 \wedge dx^2 \\
 &\quad + (\partial_1 E_3 dx^1 + \partial_2 E_3 dx^2) \wedge dx^0 \wedge dx^3 - (\partial_0 B_1 dx^0 + \partial_1 B_1 dx^1) \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
 &\quad - (\partial_0 B_3 dx^0 + \partial_3 B_3 dx^3) \wedge dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_0 B_2 dx^0 + \partial_2 B_2 dx^2) \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
 &= -(\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_3 E_2 - \partial_2 E_3 - \partial_0 B_1) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
 &\quad + (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 + \partial_0 B_2) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + (\partial_2 E_1 - \partial_1 E_2 - \partial_0 B_3) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2
 \end{aligned}$$

Logo $d\mathcal{F} = 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{E}) &= 0
 \end{aligned}$$

Como desejado. ■

Proposição 2.35 *As equações de Maxwell não-homogêneas*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} = -\mathbf{j}$$

são equivalente à equação

$$\delta\mathcal{F} = *\mathcal{J}.$$

Demonstração. Sendo $\mathcal{F} = E_1 dx^0 \wedge dx^1 + E_2 dx^0 \wedge dx^2 + E_3 dx^0 \wedge dx^3 - B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^1 \wedge dx^3 - B_3 dx^1 \wedge dx^2$, segue imediatamente do Exemplo 2.33 que $\delta\mathcal{F} = *\mathcal{G}$, onde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} &= (\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_0 E_1 - \partial_2 B_3 + \partial_3 B_2) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
 &\quad + (-\partial_0 E_2 - \partial_1 B_3 + \partial_3 B_1) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + (\partial_0 E_3 - \partial_1 B_2 + \partial_2 B_1) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2.
 \end{aligned}$$

Logo $\delta\mathcal{F} = *\mathcal{J}$ se, e somente se, $\mathcal{J} = \mathcal{G}$. Esta última afirmação é equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \\ \partial_0 E_1 - \partial_2 B_3 + \partial_3 B_2 = -j_1 \\ \partial_0 E_2 + \partial_1 B_3 - \partial_3 B_1 = -j_2 \\ \partial_0 E_3 - \partial_1 B_2 + \partial_2 B_1 = -j_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} = -\mathbf{j} \end{array} \right.$$

■

Assim concluimos a formulação exterior da teoria de Maxwell, que pode ser resumida como o estudo da forma de força eletromagnética $\mathcal{F}$ e de como essa interage com a forma de corrente $\mathcal{J}$, através das equações de Maxwell-Cartan

$$d\mathcal{F} = 0 \quad \text{e} \quad \delta\mathcal{F} = *\mathcal{J}.$$

Note que a equação de continuidade segue de forma imediata da equação não-homogênea. De fato, segue de (2.2) e da definição de estrela de Hodge que

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= *\mathcal{J} \\ &= \rho * (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) - j_1 * (dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3) + j_2 * (dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3) - j_3 * (dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2) \\ &= -\rho dx^0 + j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$0 = \delta\delta\mathcal{F} = \delta * \mathcal{J} \Rightarrow \delta\mathcal{G} = 0 \Rightarrow \partial_0\rho + \partial_1j_1 + \partial_2j_2 + \partial_3j_3 = 0,$$

onde a última igualdade segue do Exemplo 2.32. Em outras palavras,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

2.2.3 Os potenciais de calibre

Veremos agora que a formulação via formas diferenciais não somente simplifica as equações de Maxwell como torna mais natural e tremendamente mais simples a discussão sobre o potencial de calibre.

Começemos observando que $\mathbb{R}^{1,3}$ é simplesmente conexo, logo a equação de Maxwell homogênea $d\mathcal{F} = 0$ nos diz que existe uma 1-forma $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ (Ver [1], Teorema 7.4.18). Em contrapartida, como $d^2 = 0$, a existência de um tal potencial implica automaticamente na equação de Maxwell homogênea $dF = 0$. Analogamente, a existência de uma 1-forma $\mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} \tag{2.3}$$

resolve automaticamente a equação homogênea. De fato, a forma $\mathcal{A}$ é exatamente o tensor quadripotencial, i.e., $\mathcal{A} = A_\alpha dx^\alpha$, pois, por (2.25), a expressão $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ nos diz que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!}F_{\mu\alpha}dx^\mu \wedge dx^\alpha &= \partial_\mu A_\alpha dx^\mu \wedge dx^\alpha \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\alpha dx^\mu \wedge dx^\alpha + \partial_\mu A_\alpha dx^\mu \wedge dx^\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\alpha dx^\mu \wedge dx^\alpha + \partial_\alpha A_\mu dx^\alpha \wedge dx^\mu) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\alpha dx^\mu \wedge dx^\alpha - \partial_\alpha A_\mu dx^\mu \wedge dx^\alpha) \\ &= \frac{1}{2!}(\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\alpha\end{aligned}$$

e isso é equivalente a dizer que

$$F_{\mu\alpha} = \partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu.$$

Escrevendo-se $\mathcal{A}$ na forma $\mathcal{A} = \phi dx^0 + A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3$, a equação acima assume a forma

$$\begin{cases} F_{10} = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 \\ F_{20} = \partial_2 A_0 - \partial_0 A_2 \\ F_{30} = \partial_3 A_0 - \partial_0 A_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \partial_x(-\phi) - \partial_t A_1 \\ E_2 = \partial_y(-\phi) - \partial_t A_2 \\ E_3 = \partial_z(-\phi) - \partial_t A_3 \end{cases} \Rightarrow E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t},$$

o que coincide exatamente com o que tínhamos em (1.7).

Note ainda que a 1-forma $\mathcal{A}$ não é a única candidata a potencial de calibre, pois toda 1-forma $\mathcal{A} + d\chi$, onde χ é uma função diferenciável, satisfaz a equação $d(\mathcal{A} + d\chi) = F$. Com essa formulação, a transformação de calibre assume a forma

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} + d\chi.$$

De fato,

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} + d\chi \iff A_\alpha dx^\alpha \rightarrow A_\alpha dx^\alpha + \partial_\alpha \chi dx^\alpha \iff A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \chi$$

que é a transformação de calibre clássica. Naturalmente, as equações de Maxwell não se alteram mediante a uma nova escolha de calibre em concordância com essa transformação.

2.2.4 O solenóide e o monopólo em formas diferenciais

Vejamos agora como ficam os exemplos do monopólo magnético e do solenóide em formulação exterior. Isso torna mais natural o estudo do potencial de calibre em cada caso.

Exemplo 2.36 (Solenóide) *Lembremos que, no caso do solenóide, tínhamos um campo de forças tal que o campo elétrico é identicamente nulo e o campo magnético é dado por*

$$\mathbf{B}(t, x) = \begin{cases} (0, 0, B_0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a, \\ (0, 0, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a. \end{cases}$$

Assim, a 2-forma eletromagnética se escreve na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= E_1 dx^1 \wedge dx^0 + E_2 dx^2 \wedge dx^0 + E_3 dx^3 \wedge dx^0 + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 \\ &= \begin{cases} B_0 dx \wedge dy & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a, \\ 0 & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a. \end{cases} \end{aligned}$$

e a forma de potencial de calibre é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\phi dt + A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz \\ &= \begin{cases} \frac{B_0}{2}(-ydx + xdy) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a, \\ \frac{B_0 a^2}{2(x^2 + y^2)}(-ydx + xdy) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo 2.37 (Monopólo magnético) *No caso do monopólo magnético, os campos elétrico e magnético são dados por*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, x) &= 0; \\ \mathbf{B}(t, x) &= \frac{g}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x, y, z). \end{aligned}$$

Logo a 2-forma eletromagnética será

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= E_1 dx^1 \wedge dx^0 + E_2 dx^2 \wedge dx^0 + E_3 dx^3 \wedge dx^0 \\ &\quad + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 \\ &= \frac{g}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy). \end{aligned}$$

Devido à simetria das equações, é conveniente que passemos para coordenadas esféricas.

Assim teremos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \phi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos \theta \sin \phi dr - r \sin \theta \sin \phi d\theta + r \cos \theta \cos \phi d\phi, \\ dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi, \\ dz = \cos \phi dr - r \sin \phi d\phi. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{g}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) \\ &= \frac{g}{r^3} r \cos \theta \sin \phi (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \wedge (\cos \phi dr - r \sin \phi d\phi) \\ &\quad + \frac{g}{r^3} r \sin \theta \sin \phi (\cos \phi dr - r \sin \phi d\phi) \wedge (\cos \theta \sin \phi dr - r \sin \theta \sin \phi d\theta + r \cos \theta \cos \phi d\phi) \\ &\quad + \frac{g}{r^3} r \cos \phi (\cos \theta \sin \phi dr - r \sin \theta \sin \phi d\theta + r \cos \theta \cos \phi d\phi) \\ &\quad \wedge (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \\ &= \frac{g}{r^3} \left(-r^2 \sin^3 \phi \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin \theta \sin^3 \phi \cos \theta \right) dr \wedge d\phi \\ &\quad - \frac{g}{r^3} \left(2r^2 \sin \theta \cos^2 \phi \cos \theta \sin \phi + 2r^2 \cos \theta \cos^2 \phi \sin \theta \sin \phi \right) dr \wedge d\phi \\ &\quad + \frac{g}{r^3} \left(r^3 \cos^2 \theta \sin^3 \phi + r^3 \sin^2 \theta \sin^3 \phi d\phi + r^3 \cos^2 \phi \sin^2 \theta \sin \phi + r^3 \cos^2 \phi \cos^2 \theta \sin \phi \right) d\phi \wedge d\theta \\ &\quad + \frac{g}{r^3} \left(r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi \cos \phi - r^2 \cos \phi \cos^2 \theta \sin^2 \phi \right) d\theta \wedge dr \\ &\quad + \frac{g}{r^3} \left(r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos \phi - r^2 \cos \phi \sin^2 \theta \sin^2 \phi \right) d\theta \wedge dr \\ &= \frac{g}{r^3} \left(r^3 \cos^2 \theta \sin^3 \phi + r^3 \sin^2 \theta \sin^3 \phi d\phi + r^3 \cos^2 \phi \sin^2 \theta \sin \phi + r^3 \cos^2 \phi \cos^2 \theta \sin \phi \right) d\phi \wedge d\theta \\ &= g \sin \phi d\phi \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Assim, sem dificuldade podemos encontrar um potencial, pois

$$\mathcal{F} = g \sin \phi d\phi \wedge d\theta = -gd(\cos \phi) \wedge d\theta = d(-g \cos \phi d\theta).$$

Logo $\mathcal{A} = -g \cos \phi d\theta$ é um potencial para $\mathcal{F}$. Mas sabemos do Exemplo 1.8 que não pode existir potencial global em $\mathbb{R}^{1,3} \setminus \{0\}$. A primeira vista, isto parece uma contradição, devido ao fato de $(-g \cos \phi)$ ser uma função de classe C^∞ . No entanto, funções ângulo não estão bem definidas globalmente.² Veremos agora a constatação deste fato e também como, através de transformações de calibre, podemos encontrar potenciais definidos em abertos que cobrem todo o $\mathbb{R}^{1,3} \setminus \{0\}$.

De fato, retornando às coordenadas cartesianas, observamos que

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{z}{r}, \\ \theta = \arctan \frac{y}{x}, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{cases}$$

de onde, através de um cálculo simples, obtemos

$$\mathcal{A} = -g \left(-\frac{zy}{r(x^2 + y^2)} dx + \frac{zx}{r(x^2 + y^2)} dy \right).$$

Naturalmente, este potencial é singular no eixo z . No entanto, tomando a função diferenciável $f := g\theta$, a transformação de calibre $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} + df$ conduz a um potencial que é singular apenas no eixo z negativo. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} + df &= \mathcal{A} + d(g\theta) \\ &= -g \cos \phi d\theta + gd\theta \\ &= g(1 - \cos \phi) d\theta \\ &= \frac{g}{r} \frac{1}{z + r} (xdy - ydx), \end{aligned}$$

onde a última igualdade é obtida realizando a mudança de coordenadas $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Essa forma possui uma singularidade em $(0, 0, z)$ quando $z \leq 0$, pois $z + r = z + |z| = 0$. De maneira análoga, tomando-se $h = -g\theta$, concluímos que a transformação de calibre $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} + dh$ conduz a um potencial singular apenas no eixo z positivo. Assim encontramos dois potenciais, um $\mathcal{A}_+ = \mathcal{A} + df$, definido sobre a região $U_+ = \mathbb{R}^{1,3} \setminus (z \leq 0)$ e outro $\mathcal{A}_- = \mathcal{A} + dh$, definido sobre $U_- = \mathbb{R}^{1,3} \setminus (z \geq 0)$. Então, temos novamente dois potenciais tais que a união de seus domínios é todo o $\mathbb{R}^{1,3} \setminus \{0\}$ e que diferem por uma transformação de calibre, pois

$$\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_- = (gd\theta - g \cos \phi d\theta) + (gd\theta + g \cos \phi d\theta) = 2gd\theta = d(2g\theta).$$

2.2.5 A invariância das equações de Maxwell por transformações de Lorentz

Iremos agora revisar a invariância das equações de Maxwell por transformação de Lorentz.

²Na realidade, isso se deve ao fato das chamadas coordenadas esféricas não serem propriamente uma mudança global de coordenadas.

Recordando a transformação de Lorentz

Por uma questão de simplicidade, iremos repetir aqui o procedimento de Poincaré e Lorentz (cf. [80]) e considerar unidades de medida tais que a velocidade da luz no vácuo seja igual a uma unidade, i.e., $c = 1$. Sendo assim, a transformação de Lorentz assume a forma mais simétrica

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.4)$$

Mais ainda, seguindo Poincaré, iremos procurar por transformações um pouco mais gerais, que são da forma

$$\begin{cases} t' = \ell\gamma(t - \beta x) \\ x' = \ell\gamma(x - \beta t) \\ y' = \ell y \\ z' = \ell z \end{cases}, \quad \ell > 0 < \beta < 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

também batizadas por ele como transformações de Lorentz.

Note que as equações de Maxwell homogêneas se preservam intactas, uma vez que

$$dT^*\mathcal{F} = T^*d\mathcal{F} = T^*0 = 0.$$

Vejamos agora o caso das as equações de Maxwell não-homogêneas. Como T é uma aplicação que preserva a orientação, então T^* comuta o operador $*$ de Hodge. Dessa forma, se $\mathcal{F}' = T^*\mathcal{F}$ e $\mathcal{J}' = T^*\mathcal{J}$, então

$$\delta\mathcal{F}' = \delta T^*\mathcal{F} = *d*T^*\mathcal{F} = T^* * d * \mathcal{F} = T^*\delta\mathcal{F} = T^* * \mathcal{J} = *T^*\mathcal{J} = *\mathcal{J}',$$

o que mostra a invariância das equações de Maxwell com relação a T .

Grandezas eletromagnéticas em coordenadas locais

Faremos aqui uma análise da expressão local das grandezas eletromagnéticas nas coordenadas de S' .

A forma eletromagnética. Começemos pelo comportamento da forma eletromagnética nas coordenadas $S': (t', x', y', z')$ em movimento uniforme com relação ao referencial $S: (t, x, y, z)$. Seja T uma transformação de Lorentz da forma $T(t', x', y', z') = (\ell^{-1}\gamma(t' + \beta x'), \ell^{-1}\gamma(x' + \beta t'), \ell^{-1}y', \ell^{-1}z')$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & (-1)^{a_1} E_1 dt \wedge dx + (-1)^{a_2} E_2 dt \wedge dy + (-1)^{a_3} E_3 dt \wedge dz \\ & + (-1)^{b_1} B_1 dy \wedge dz + (-1)^{b_2} B_2 dx \wedge dz + (-1)^{b_3} B_3 dx \wedge dy \end{aligned}$$

a forma eletromagnética, então vamos realizar o cálculo de $T^*\mathcal{F}(t', x', y', z')$. De fato, os transformados das componentes elétricas da forma se escrevem na forma

$$\begin{aligned} T^*(E_1 dt \wedge dx) &= \left(\frac{\gamma}{\ell}\right)^2 E_1 \circ T[d(t' + \beta x') \wedge d(x' + \beta t')] \\ &= \left(\frac{\gamma}{\ell}\right)^2 E_1 \circ T[(dt' + \beta dx') \wedge (dx' + \beta dt')] \\ &= \left(\frac{\gamma}{\ell}\right)^2 E_1 \circ T[1 - \beta^2] dt' \wedge dx' \\ &= \frac{1}{\ell^2} E_1 \circ T dt' \wedge dx', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^*(E_2 dt \wedge dy) &= \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) E_2 \circ T[d(t' + \beta x') \wedge dy'] \\ &= \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) E_2 \circ T[(dt' + \beta dx') \wedge dy'] \\ &= \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) E_2 \circ T[dt' \wedge dy' + \beta dx' \wedge dy'], \end{aligned}$$

$$T^*(E_3 dt \wedge dz) = \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) E_3 \circ T[dt' \wedge dz' + \beta dx' \wedge dz'].$$

Por outro lado, as componentes magnéticas assumem a forma

$$T^*(B_1 dy \wedge dz) = \left(\frac{1}{\ell^2}\right) B_1 \circ T[dy' \wedge dz'],$$

$$\begin{aligned} T^*(B_3 dx \wedge dy) &= \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) B_3 \circ T[d(x' + \beta t') \wedge dy'] \\ &= \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) B_3 \circ T[dx' \wedge dy' + \beta dt' \wedge dy'], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^*(B_2 dx \wedge dz) &= \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) B_2 \circ T[(dx' + \beta dt') \wedge dz'] \\ &= \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) B_2 \circ T[dx' \wedge dz' + \beta dt' \wedge dz']. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} T^*F &= \frac{1}{\ell^2} E_1 \circ T dt' \wedge dx' + \frac{\gamma}{\ell^2} E_2 \circ T[dt' \wedge dy' + \beta dx' \wedge dy'] \\ &\quad + \frac{\gamma}{\ell^2} E_3 \circ T[dt' \wedge dz' + \beta dx' \wedge dz'] - \frac{1}{\ell^2} B_1 \circ T[dy' \wedge dz'] \\ &\quad - \frac{\gamma}{\ell^2} B_3 \circ T[dx' \wedge dy' + \beta dt' \wedge dy'] + \frac{\gamma}{\ell^2} B_2 \circ T[dx' \wedge dz' + \beta dt' \wedge dz'] \\ &= \frac{1}{\ell^2} E_1 \circ T[dt' \wedge dx'] + \frac{\gamma}{\ell^2} (E_2 - \beta B_3) \circ T[dt' \wedge dy'] \\ &\quad + \frac{\gamma}{\ell^2} (E_3 + \beta B_2) \circ T[dt' \wedge dz'] - \frac{1}{\ell^2} B_1 \circ T[dy' \wedge dz'] \\ &\quad + \frac{\gamma}{\ell^2} (-B_3 + \beta E_2) \circ T[dx' \wedge dy'] + \frac{\gamma}{\ell^2} (B_2 + \beta E_3) \circ T[dz' \wedge dx'] \end{aligned}$$

Desta forma, se a forma eletromagnética $F' = T^*F$ é dada nas coordenadas de S' por

$$\mathcal{F}' = E'_1 dt \wedge dx + E'_2 dt \wedge dy + E'_3 dt \wedge dz - B'_1 dy \wedge dz - B'_2 dx \wedge dy - B'_3 dx \wedge dz,$$

então temos

$$\begin{aligned} E'_1 &= \frac{1}{\ell^2} E_1 \circ T, & E'_2 &= \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) (E_2 - \beta B_3) \circ T, & E'_3 &= \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) (E_3 + \beta B_2) \circ T, \\ B'_1 &= \left(\frac{1}{\ell^2}\right) B_1 \circ T, & B'_2 &= \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) (B_2 + \beta E_3) \circ T, & B'_3 &= \left(\frac{\gamma}{\ell^2}\right) (B_3 - \beta E_2) \circ T. \end{aligned}$$

Isto mostra como se comportam em coordenadas locais as componentes da forma eletromagnética em face de uma transformação de Lorentz.

A forma de carga-corrente. Recorde que a expressão da forma de carga-corrente é dada no referencial $S: (t, x, y, z)$ por

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \rho dx \wedge dy \wedge dz - j_1 dt \wedge dy \wedge dz + j_2 dt \wedge dx \wedge dz - j_3 dt \wedge dx \wedge dy \\ &= \rho dx \wedge dy \wedge dz - \rho v_x dt \wedge dy \wedge dz + \rho v_y dt \wedge dx \wedge dz - \rho v_z dt \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

Façamos agora um estudo de seu comportamento por mudança de variáveis.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}' &= T^* \mathcal{J} \\ &= \frac{\gamma}{\ell^3} \rho \circ T (dx' + \beta dt') \wedge dy' \wedge dz' - \frac{\gamma}{\ell^3} j_1 \circ T (dt' + \beta dx') \wedge dy' \wedge dz' \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{\ell^3} j_2 \circ T (dt' + \beta dx') \wedge (dx' + \beta dt') \wedge dz' - \frac{\gamma^2}{\ell^3} j_3 \circ T (dt' + \beta dx') \wedge (dx' + \beta dt') \wedge dy' \\ &= \frac{\gamma}{\ell^3} (\rho - \beta j_1) \circ T dx' \wedge dy' \wedge dz' + \frac{\gamma}{\ell^3} (\beta \rho - j_1) \circ T dt' \wedge dy' \wedge dz' \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{\ell^3} (1 - \beta^2) j_2 \circ T dt' \wedge dx' \wedge dz' - \frac{\gamma^2}{\ell^3} (1 - \beta^2) j_3 \circ T dt' \wedge dx' \wedge dy' \\ &= \frac{\gamma}{\ell^3} (1 - \beta v_x) \rho \circ T dx' \wedge dy' \wedge dz' + \frac{\gamma}{\ell^3} (\beta - v_x) \rho \circ T dt' \wedge dy' \wedge dz' \\ &\quad + \frac{1}{\ell^3} v_y (\rho \circ T) dt' \wedge dx' \wedge dz' - \frac{1}{\ell^3} v_z (\rho \circ T) dt' \wedge dx' \wedge dy' \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{J}' = \rho' dx \wedge dy \wedge dz - j'_1 dt \wedge dy \wedge dz + j'_2 dt \wedge dx \wedge dz - j'_3 dt \wedge dx \wedge dy$, segue que

$$\rho' = \frac{\gamma}{\ell^3} (1 - \beta v_x) \rho \circ T, \quad \rho' v'_x = \frac{\gamma}{\ell^3} (v_x - \beta) \rho \circ T, \quad \rho' v'_y = \frac{1}{\ell^3} v_y (\rho \circ T), \quad \rho' v'_z = \frac{1}{\ell^3} v_z (\rho \circ T),$$

de onde obtemos

$$\rho' = \frac{\gamma}{\ell^3} (1 - \beta v_x) \rho \circ T, \quad v'_x = \frac{v_x - \beta}{1 - \beta v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta v_x)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \beta v_x)}.$$

2.2.6 A forma eletromagnética e a força de Lorentz.

Recorde que a 2-forma de campo eletromagnético e a 1-forma a forma de corrente são dadas respectivamente por

$$\mathcal{F} = E_1 dx^0 \wedge dx^1 + E_2 dx^0 \wedge dx^2 + E_3 dx^0 \wedge dx^3 - B_1 dx^2 \wedge dx^3 - B_2 dx^1 \wedge dx^3 + B_3 dx^1 \wedge dx^2.$$

O que faremos agora é determinar o formato da força de Lorentz na formulação relativística das leis de Maxwell.

Recorde que sendo Sendo $U \subset \mathbb{R}^{1,3}$ um aberto, então o operador $\# : \Omega^1(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$, dado em coordenadas locais por

$$\begin{aligned} a_0 dx^0 &\rightarrow a_0 \partial_0, \\ a_1 dx^1 &\rightarrow -a_1 \partial_1 \\ a_2 dx^2 &\rightarrow -a_2 \partial_2 \\ a_3 dx^3 &\rightarrow -a_3 \partial_3 \end{aligned}$$

é um isomorfismo de $C^\infty(U)$ -módulos.

Proposição 2.38 *O tensor força-trabalho (hiperforça) de Lorentz $\mathbf{F}_\mathcal{L}$ pode ser obtido em termos de formas diferenciais através da expressão*

$$\mathbf{F}_\mathcal{L} = -\rho (\mathbf{i}_U \mathcal{F})^\# ,$$

onde $\mathbf{U} = (U^\beta)$ é a quadrivelocidade da partícula pontual, ρ é a densidade de carga e $\mathbf{i}_U \mathcal{F}$ é a contração da forma $\mathcal{F}$ por $\mathbf{U}$.

Demonstração. Sendo $\mathbf{U} = \frac{(1, \mathbf{v})}{\|(1, \mathbf{v})\|_\mathcal{L}} = \frac{(1, v^1, v^2, v^3)}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma(1, \mathbf{v})$, onde $v^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Assim, segue da Proposição 2.20 que

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_U \mathcal{F} &= E_1 \mathbf{i}_U(dx^0) \cdot dx^1 - E_1 dx^0 \cdot \mathbf{i}_U(dx^1) + E_2 \mathbf{i}_U(dx^0) \cdot dx^2 - E_2 dx^0 \cdot \mathbf{i}_U(dx^2) \\ &\quad + E_3 \mathbf{i}_U(dx^0) \cdot dx^3 - E_3 dx^0 \cdot \mathbf{i}_U(dx^3) - B_1 \mathbf{i}_U(dx^2) \cdot dx^3 + B_1 dx^2 \cdot \mathbf{i}_U(dx^3) \\ &\quad - B_3 \mathbf{i}_U(dx^1) \cdot dx^2 + B_3 dx^1 \cdot \mathbf{i}_U(dx^2) + B_2 \mathbf{i}_U(dx^1) \cdot dx^3 - B_2 dx^1 \cdot \mathbf{i}_U(dx^3) \\ &= \gamma(E_1 dx^1 - E_1 v^1 dx^0 + E_2 dx^2 - E_2 v^2 dx^0 + E_3 dx^3 - E_3 v^3 dx^0 - B_1 v^2 dx^3 \\ &\quad + B_1 v^3 dx^2 - B_3 v^1 dx^2 + B_3 v^2 dx^1 + B_2 v^1 dx^3 - B_2 v^3 dx^1) \\ &= -\gamma(E_1 v^1 + E_2 v^2 + E_3 v^3) dx^0 + \gamma(E_1 + B_3 v^2 - B_2 v^3) dx^1 \\ &\quad + \gamma(E_2 + B_1 v^3 - B_3 v^1) dx^2 + \gamma(E_3 + B_2 v^1 - B_1 v^2) dx^3. \end{aligned}$$

Agora recorde de (1.34) que se $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ é a força de Lorentz, então

$$\begin{aligned} f_1 &= \rho(E_1 + v^2 B_3 - v^3 B_2) \\ f_2 &= \rho(E_2 + v^3 B_1 - v^1 B_3) \\ f_3 &= \rho(E_3 + v^1 B_2 - v^2 B_1) \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$-\rho(\mathbf{i}_U \mathcal{F}) = \gamma[(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dx^0 - f_1 dx^1 - f_2 dx^2 - f_3 dx^3],$$

de onde segue o resultado desejado, uma vez que $\mathbf{F}_\mathcal{L} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{f})$. ■

Chegamos então à seguinte tabela comparativa entre as diferentes formulações para a teoria de Maxwell apresentadas aqui.

	Forma Vetorial	Forma Exterior
Equações de Maxwell	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} = -\mathbf{j}$	$d\mathcal{F} = 0$ $\delta\mathcal{F} = \mathcal{J}$
Equação de continuidade	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$	$\delta\mathcal{J} = 0$
Potencial de calibre	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$	$\mathcal{F} = d\mathcal{A}$
Transformação de calibre	$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + \nabla\chi$	$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} + d\chi$
Força de Lorentz	$\mathbf{F} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = -\rho(\mathbf{i}_U \mathcal{F})^\#$