

Programa de Pós-Graduação
em Matemática da UFES

ANÁLISE FUNCIONAL (com aplicações à Mecânica Quântica)

Curso de Verão — 90h

Professor: Victor Goulart

Monitor: João Medeiros

Formato: 6 semanas, segunda a sexta-feira (1 sessão semanal de problemas)

Avaliação: Prova intermediária + prova final (50% da nota final cada)

Bibliografia básica:

Introdução à Análise Funcional, César Rogério de Oliveira, Projeto Euclides, IMPA

Bibliografia complementar:

Methods of Modern Mathematical Physics, Michael Reed e Barry Simon

Functional Analysis, Peter Lax

Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Haïm Brézis

Bibliografia auxiliar (e alguns clássicos):

The Elements of Integration, Robert Bartle

Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Fomin-Kolmogorov

Functional Analysis, Kosaku Yosida

The Principles of Quantum Mechanics, P.A.M. Dirac

Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, John von Neumann

Quantum Mechanics, non-relativistic theory, Lev Landau and Evgeny Lifschitz

Quantum Mechanics, Bernard Diu, Claude Cohen-Tannoudji and Franck Laloe

Introduction to Quantum Mechanics, David Griffiths

PLANO DO CURSO

SEMANA 1 — Fundamentos Topológicos e Espaços Normados

Objetivo: Introduzir a linguagem e importantes exemplos

- Breve revisão de Topologia Geral
- Espaços normados e métricos
- Sequências de Cauchy e completude

- Exemplos fundamentais: C^0 , ℓ^p , $1 \leq p \leq \infty$
- Breve revisão de Teoria da Medida e Integração
- Exemplos fundamentais: ℓ^p , L^p , $1 \leq p \leq \infty$
- Espaços de Banach
- Subespaços fechados e quocientes
- Completamento de espaços normados
- Espaços duais
- Funcionais lineares contínuos
- Normas no espaço dual
- Teorema de Hahn–Banach (forma analítica)
- Extensões dominadas
- Separação geométrica

Sessão de problemas: completamento, Hahn–Banach, separação convexa

Referências: Oliveira, 1, 2, 4, 10–12; Brézis, 1–2; Lax, 3–5; Reed–Simon I, 3, 4, 6

SEMANA 2 — Teoremas Fundamentais da Análise Funcional

Objetivo: entender os pilares estruturais da teoria

- Topologias fraca e fraca*
- Compacidade fraca
- Bidual
- Princípio da Limitação Uniforme (Teorema de Banach–Steinhaus)
- Teorema da Aplicação Aberta
- Teorema do Gráfico Fechado
- Equivalência entre Aplicação Aberta e Gráfico Fechado
- Importância para operadores não limitados

Sessão de problemas: aplicações dos teoremas estruturais

Referências: Oliveira, 2, 6–9, 14, 15,; Brézis, 4; Lax, 5, 10–12, Reed–Simon I, 4

SEMANA 3 — Espaços de Hilbert e Operadores Limitados

Objetivo: transição natural para a Mecânica Quântica

- Espaços de Hilbert (separáveis, unicidade a menos de isometria linear)
- Ortogonalidade e projeções
- Bases (de Schauder) ortonormais
- Teorema da Representação de Riesz
- Identificação natural $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$ (notação $\langle \cdot |$ bra-ket $|\cdot \rangle$)
- Operadores lineares limitados
- Norma de operador
- Operador adjunto
- Lema de Lax-Milgram
- Operadores normais, unitários e auto-adjuntos
- Primeiras interpretações físicas

Sessão de problemas: adjuntos, projeções, operadores unitários

Referências: Oliveira, 3, 4, 13, 17–21; Brézis, 5–6; Lax, 6–8, Reed–Simon I, 2, 6

PROVA INTERMEDIÁRIA (segunda-feira da Semana 4)

Conteúdo:

- Teorema de Hahn–Banach
 - Teorema de Banach–Steinhaus
 - Teoremas da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado
 - Espaços de Hilbert
-

SEMANA 4 — Operadores Não-Limitados

Objetivo: fundamentos matemáticos da Mecânica Quântica

- Motivação física
- Domínios densos
- Exemplos de operadores diferenciais (momento, laplaciano)
- Operadores fechados e fecháveis
- Gráficos e extensões
- Operador adjunto para operadores não-limitados
- Densidade do domínio

Sessão de problemas: fechamento de operadores e exemplos físicos

Referências: Reed–Simon I, 8

SEMANA 5 — Análise de Fourier e Auto-adjunção

Objetivo: formulação correta de observáveis quânticos

- Séries de Fourier
- A transformada de Fourier
- Operadores simétricos vs. auto-adjuntos
- Contraexemplos
- Subespaços de deficiência
- Índices de deficiência
- Teorema de von Neumann
- Extensões auto-adjuntas
- Auto-adjunção essencial
- Significado físico

Sessão de problemas: cálculo de séries e transformadas de Fourier e de índices

Referências: Oliveira, 20, 22; Reed–Simon II, (9, 10)

SEMANA 6 — Teoria Espectral e Dinâmica Quântica

Objetivo: compreender a evolução temporal de estados quânticos

- Espectro de operadores auto-adjuntos
- Espectro pontual e contínuo
- Teorema espectral (para operadores auto-adjuntos somente)
- Medidas espectrais
- Cálculo funcional
- Grupos unitários fortemente contínuos
- Teorema de Stone
- Equação de Schrödinger

Sessão de problemas: evolução temporal e interpretação física

Referências: Oliveira, 27–29; Reed–Simon I, Caps. 7,8

PROVA FINAL (primeira segunda-feira após a Semana 6)

Conteúdo:

- Operadores não-limitados
- Auto-adjunção
- Índices de deficiência
- Teorema Espectral
- Teorema de Stone

UFES' Math Graduate School (PPGMAT-UFES)

FUNCTIONAL ANALYSIS (with applications to Quantum Mechanics)

Summer Course — 90h

Lecturer: Victor Goulart

TA: João Medeiros

Schedule: 6 weeks, monday to friday (with weekly problem sessions)

Examination: midterm exam + final exam (each corresponds to half the grade)

Basic bibliography (in Portuguese):

Introdução à Análise Funcional, César Rogério de Oliveira, Projeto Euclides, IMPA

Complementary bibliography:

Methods of Modern Mathematical Physics, Michael Reed e Barry Simon

Functional Analysis, Peter Lax

Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Haïm Brézis

Auxiliary bibliography (and some classics):

The Elements of Integration, Robert Bartle

Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Fomin-Kolmogorov

Functional Analysis, Kosaku Yosida

The Principles of Quantum Mechanics, P.A.M. Dirac

Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, John von Neumann

Quantum Mechanics, non-relativistic theory, Lev Landau and Evgeny Lifschitz

Quantum Mechanics, Bernard Diu, Claude Cohen-Tannoudji and Franck Lalœ

Introduction to Quantum Mechanics, David Griffiths

COURSE SYLLABUS

WEEK 1 — Topological Foundations and Normed Spaces

Goal: introduce language and important examples

- Brief review of Point-set Topology
- Normed and metric spaces
- Cauchy sequences and completeness
- Fundamental examples: C^0 , ℓ^p , $1 \leq p \leq \infty$

- Banach spaces
- Brief review of Measure Theory and Lebesgue Integration
- Fundamental examples: ℓ^p , L^p , $1 \leq p \leq \infty$
- Closed subspaces and quotient spaces
- Completion of normed spaces
- Dual spaces
- Continuous linear functionals
- Norms on the dual space
- Hahn–Banach Theorem (analytic form)
- Dominated extensions
- Geometric separation

Problem session: completion, Hahn–Banach, convex separation

References: Oliveira, 1, 2, 4, 10–12; Brézis, 1–2; Lax, 3–5; Reed–Simon I, 3, 4, 6

WEEK 2 — Fundamental Theorems of Functional Analysis

Goal: understand the structural pillars of the theory

- Weak and weak-* topologies
- Weak compactness
- The bidual
- Uniform Boundedness Principle (Banach–Steinhaus Theorem)
- Open Mapping Theorem
- Closed Graph Theorem
- Equivalence between Open Mapping and Closed Graph
- Importance for unbounded operators

Problem session: applications of the structural theorems

References: Oliveira, 2, 6–9, 14, 15; Brézis, 4; Lax, 5, 10–12; Reed–Simon I, 4

WEEK 3 — Hilbert Spaces and Bounded Operators

Goal: natural transition to Quantum Mechanics

- Hilbert spaces (and the unique linear isometry class of separable Hilbert spaces)
- Orthogonality and projections
- Orthonormal (Schauder) bases
- Riesz Representation Theorem
- Natural identification $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$ (the $\langle \cdot |$ bra-ket $|\cdot \rangle$ notation)
- Bounded linear operators
- Operator norm
- Adjoint operator
- Lax-Milgram Lemma
- Normal, unitary, and self-adjoint operators
- First physical interpretations

Problem session: adjoints, projections, unitary operators

References: Oliveira, 3, 4, 13, 17–21; Brézis, 5–6; Lax, 6–8, Reed–Simon I, 2, 6

—

MIDTERM EXAM (monday of Week 4)

Coverage:

- Hahn–Banach Theorem
- Banach–Steinhaus Theorem
- Open Mapping and Closed Graph Theorems
- Hilbert Spaces

—

WEEK 4 — Unbounded Operators

Goal: mathematical foundations of Quantum Mechanics

- Physical motivation
- Densely defined operators
- Differential operator examples (momentum, Laplacian)
- Closed and closable operators
- Graphs and extensions
- Adjoint of unbounded operators
- Density of the domain

Problem session: operator closures and physical examples

References: Reed–Simon I, 8

WEEK 5 — Fourier Analysis and Self-Adjointness

Goal: proper formulation of quantum observables

- Fourier series
- Fourier transform
- Symmetric vs. self-adjoint operators
- Counterexamples
- Deficiency subspaces
- Deficiency indices
- von Neumann’s Theorem
- Self-adjoint extensions
- Essential self-adjointness
- Physical meaning

Problem session: computation of Fourier series and transforms and of indices

References: Oliveira, 20, 22; Reed–Simon II, (9, 10)

WEEK 6 — Spectral Theory and Quantum Dynamics

Goal: understand the time-evolution of quantum states

- Spectrum of self-adjoint operators
- Point and continuous spectrum
- Spectral Theorem (for self-adjoint operators only)
- Spectral measures
- Functional calculus
- Strongly continuous unitary groups
- Stone's Theorem
- Schrödinger equation

Problem session: time evolution and physical interpretation

References: Oliveira, 27–29 ; Reed–Simon I, 7, 8

FINAL EXAM (first monday after Week 6)

Coverage:

- Unbounded operators
- Self-adjointness
- Deficiency indices
- Spectral theorem
- Stone's theorem